Colle du 19/02
Continuité

Sujet 1

Question de cours. Démontrer la caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions définies sur $I = [a; b]$ telles que pour tout $x \in I$, $f(x) < g(x)$.

1. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $f(x) + c \leqslant g(x)$.
2. Discuter du cas où $I = [a; +\infty[$.

Exercice 2.

1. Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in [0; +\infty[$ et pour tout $n \geqslant 0$,
$$x_{n+1} = \ln\left(x_n + 1\right).$$
2. Déterminer l'ensemble des fonctions f définies et continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant l'équation suivante :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x) = f\left(\mathrm{e}^x - 1\right).$$

Sujet 2

Question de cours. Démontrer l'unicité de la limite d'une fonction.

Exercice 1. Soit f une fonction continue sur l'intervalle $I = [0; 1]$ et φ la fonction définie sur I par
$$\forall x \in I, \qquad \varphi(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t).$$

Montrer que φ est croissante et continue.
Exercice 2. Soit f une application continue et positive sur $\mathbb{R}_+$ telle que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ admette une limite $l < 1$ en $+\infty$. Montrer que f admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Sujet 3

Question de cours. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. Soit f $[a; b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(a) \neq f(b)$. Montrer que pour tout $(u, v) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)$ il existe $c \in]a; b[$ tel que
$$uf(a) + vf(b) = (u + v)f(c).$$

Exercice 2. Soit $f : [a; b] \to [a; b]$ une application continue.

1. Montrer que f admet un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in [a;b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

On suppose dans toute la suite que

$$\forall x \neq y \in [a;b], \qquad |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

2. Montrer que f admet un unique point fixe.

On souhaite démontrer l'existence du point fixe de f par une autre méthode.

3. Montrer que $g : x \mapsto |f(x) - x|$ définie sur $[a;b]$ admet un minimum atteint en $c \in [a;b]$.
4. Montrer que c est l'unique point fixe de f.

Rab

Exercice 3. Etudier la continuité de la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant l'équation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x^2) = f(x).$$

Exercice 3. Déterminer l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ vérifiant l'équation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f(x^2) \leqslant f(x) \qquad \text{et} \qquad f(0) = f(1).$$