

**Colle du 15/03**  
**Continuité**

**Sujet 1**

**Question de cours.** Démontrer la limite d'une somme en utilisant la caractérisation séquentielle.

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f \circ f$  possède un point fixe. Montrer que  $f$  admet un point fixe.

**Exercice 2.** Déterminer l'ensemble des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+$  vérifiant l'équation suivante

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x^2) = f(x).$$

**Sujet 2**

**Question de cours.** Démontrer l'unicité de la limite d'une fonction.

**Exercice 1.** Etudier sur  $\mathbb{R}$  la continuité de la fonction  $f$  :

$$x \mapsto [x] - \sqrt{x - [x]}.$$

**Exercice 2.**

1. Etudier la convergence de la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $x_0 \in [0; +\infty[$  et pour tout  $n \geq 0$ ,

$$x_{n+1} = \ln(x_n + 1).$$

2. Déterminer l'ensemble des fonctions  $f$  définies et continues sur  $\mathbb{R}_+$  vérifiant l'équation suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = f(e^x - 1).$$

**Sujet 3**

**Question de cours.** Démontrer la limite d'un produit sans utiliser la caractérisation séquentielle.

**Exercice 1.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction bornée et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Montrer que  $f \circ g$  et  $g \circ f$  sont bornées.

**Exercice 2.** Etudier la continuité de la fonction  $f$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  par

$$f(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!}.$$