Colle du 19/03
Dérivabilité et géométrie du plan

Sujet 1

Question de cours. Démontrer le théorème de Rolle et des accroissements finis.

Exercice 1. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ dérivable, avec $0 < a < b$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que le maximum de f ou le minimum de f n'est pas atteint en a ni en b. En déduire qu'il existe un point de la courbe représentative de f où la tangente passe par l'origine.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et p le demi-périmètre de ABC.

1. En calculant de deux façons $\left\langle \vec{BC}, \vec{BC} \right\rangle$, exprimer $cos\left(\hat{A}\right)$ en fonction de a, b et c.
2. En déduire $sin\left(\hat{A}\right)$ puis la formule de Héron donnant l'aire S du triangle ABC :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Sujet 2

Question de cours. Soit f une fonction dérivable. Montrer que f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle qu'il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(\alpha x) = \alpha f(x).$$

En utilisant la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{f(\alpha^n x)}{\alpha^n x}$, montrer que f est une fonction linéaire.

Exercice 2. On considère deux villes A et B. A se trouve à une distance de 2 km d'une ligne de chemin de fer et B se trouve à 5 km de la même ligne. Les villes A et B se situent du même côté de la voie ferrée et sont distante l'une de l'autre de 5 km. On souhaite construire une seule gare sur la ligne de chemin de fer pour desservir les deux villes, de telle sorte que la distance des villes à la gare soit la plus petite possible. Faire un schéma de la situation puis déterminer la position de la gare.
Indication : considérer le point C symétrique du point B par rapport à la ligne de chemin de fer.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer les identités de polarisation.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(x) \to l \in \mathbb{R}$ quand $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle non aplati et A', B' et C' trois points du plan tels que $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$ et $C' \in (AB)$. En se plaçant dans un repère adapté, montrer que A', B' et C' sont alignés si et seulement si les milieux I de $[AA']$, J de $[BB']$ et K de $[CC']$ sont alignés.