Colle du 27/03
Dérivabilité et géométrie du plan

Sujet 1

Question de cours. Démontrer le théorème de Rolle et des accroissements finis.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Exercice 2. Dans le plan rapporté au repère orthonormé direct $\mathscr{R} = \left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$, on considère la courbe $\mathscr{C}$ d'équation

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0.$$

On note $O'(-1;1)_{\mathscr{R}}$. Soient $\vec{I}$ le vecteur de norme 1 tel que $\left(\vec{i}, \vec{I}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\vec{J}$ le vecteur tel que $\left(\vec{I}, \vec{J}\right)$ soit orthonormée. On définit alors $\mathscr{R}'$ le repère $\left(O'; \vec{I}, \vec{J}\right)$.

1. Soit $M\,(X;Y)_{\mathscr{R}'}$ un point du plan. Exprimer les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}$.
2. En déduire l'équation de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{R}'$.

Sujet 2

Question de cours. Soit f une fonction dérivable. Montrer que f est croissante si et seulement si $f' \geqslant 0$.

Exercice 1. Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f'(a) = f(a)$ et $f'(b) = f(b)$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.
Indication : utiliser la fonction $x \mapsto (f'(x) - f(x))\,\mathrm{e}^x$.

Exercice 2. Soit Δ une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ où $(a;b) \neq (0;0)$. Montrer que la distance de $C\,(x_C; y_C)$ à la droite Δ est égale à

$$d\,(C;\Delta) = \frac{|ax_C + by_C + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer les identités de polarisation.

Exercice 1. Déterminer

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{1-x}} - \frac{1}{\sqrt[5]{1+x}}\right).$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. En admettant que $\vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC} = \vec{0}$, montrer que les triangles GAB, GAC et GBC ont la même aire.