Colle du 04/04
Géométrie dans l'espace/ Polynômes

Sujet 1

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'ensemble des points $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rl} x^2+y^2+z^2-2x-3 & =0 \\ x+y-2z-2 & =0 \end{array} \right.$$

Exercice 2.

1. Montrer sans calcul l'identité de Lagrange : pour tout $(a,b,c,a',b',c') \in \mathbb{R}^6$,

$$(aa'+bb'+cc')^2+(bc'-b'c)^2+(ca'-ac')^2+(ab'-a'b)^2 = \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a'^2+b'^2+c'^2\right).$$

2. Montrer l'inégalité de Hadamard : pour tout $(a,b,c,a',b',c',a'',b'',c'') \in \mathbb{R}^9$,

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \leqslant \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}\sqrt{a''^2+b''^2+c''^2}.$$

Sujet 2

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme par les dérivées successives.

Exercice 1. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'ensemble des points $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rl} y+2z & =1 \\ x+y+z & =0 \\ -x+y+3z & =2 \end{array} \right.$$

Exercice 2. Soient (A,B,C,D) quatre points de l'espace tels que $\left(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right)$ soit un repère orthonormé direct. On fixe $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ et on considère les points M, M', N, N', définis par

$$\vec{AM} = p\vec{AB}, \qquad \vec{DM'} = p\vec{DC}, \qquad \vec{AN} = q\vec{AD}, \qquad \vec{BN'} = q\vec{BC}.$$

Montrer que les droites (MM') et (NN') sont coplanaires.

Sujet 3

Question de cours. Démontrer le théorème de la division euclidienne pour les polynômes.

Exercice 1. Déterminer la nature et les caractéristiques de l'ensemble des points $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{rl} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z & = 19 \\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 6y & = 31 \end{array} \right.$$

Exercice 2. On considère deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathscr{D} \quad \left\{ \begin{array}{rl} x & = x_0 + \lambda \\ y & = y_0 + \lambda \\ z & = z_0 + \lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}' \quad \left\{ \begin{array}{rl} x & = a\lambda \\ y & = b\lambda \\ z & = c\lambda \end{array} \right. , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où $(x_0, y_0, z_0, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient coplanaires.

Rab

Exercice 3. Déterminer la hauteur d'un tétraèdre régulier de côté 1.