Colle du 12/04
Géométrie dans l'espace/Polynômes

Sujet 1

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de Taylor pour les polynômes.

Exercice 1. Soient $P = X^3 + 3X - 2i$ et x_1, x_2 et x_3 les trois racines complexes de P (on ne cherchera pas à les calculer). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^{3} x_k^n.$$

1. Justifier l'existence des trois racines complexes de P.
2. Calculer S_1 et S_2.
3. Déterminer une relation entre S_{n+3}, S_{n+1} et S_n.
4. En déduire S_7.

Exercice 2.

1. Montrer sans calcul l'identité de Lagrange : pour tout $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$,

$$(aa' + bb' + cc')^2 + (bc' - b'c)^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - a'b)^2 = \left(a^2 + b^2 + c^2\right)\left(a'^2 + b'^2 + c'^2\right).$$

2. Montrer l'inégalité de Hadamard : pour tout $(a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'') \in \mathbb{R}^9$,

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}.$$

Sujet 2

Question de cours. Enoncer et démontrer la caractérisation de la multiplicité d'une racine d'un polynôme par les dérivées successives.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$ n'admet que des racines simples.

Exercice 2. Soient (A, B, C, D) quatre points de l'espace tels que $\left(A, \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\right)$ soit un repère orthonormé direct. On fixe $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ et on considère les points M, M', N, N', définis par

$$\vec{AM} = p\vec{AB}, \qquad \vec{DM'} = p\vec{DC}, \qquad \vec{AN} = q\vec{AD}, \qquad \vec{BN'} = q\vec{BC}.$$

Montrer que les droites (MM') et (NN') sont coplanaires.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule de la distance d'un point à un plan.

Exercice 1. Déterminer tous les polynômes P de $\mathbb{C}[X]$ de degré 5 tels que $(X-1)^3$ divise $P+1$ et $(X+1)^3$ divise $P-1$.

Exercice 2. On considère deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ définies par les représentations paramétriques suivantes :

$$\mathscr{D} \quad \begin{cases} x &= x_0 + \lambda \\ y &= y_0 + \lambda \\ z &= z_0 + \lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \text{et} \qquad \mathscr{D}' \quad \begin{cases} x &= a\lambda \\ y &= b\lambda \\ z &= c\lambda \end{cases} , \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

où $(x_0, y_0, z_0, a, b, c) \in \mathbb{R}^6$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ soient coplanaires.

Rab

Exercice 3. Déterminer la hauteur d'un tétraèdre régulier de côté 1.
Exercice 4. Déterminer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.
Indication : utiliser la division euclidienne de n par m.
Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Montrer que $X^n - X + 1$ n'a que des racines simples.