Colle du 02/10
Fonctions réelles

Sujet 1

Question de cours. Soit $f \in \mathcal{F}(X, Y)$. Donner la définition de l'injectivité de f puis montrer le résultat suivant : f est injective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(Y, X)$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera.
2. Soient x et y deux réels tels que $y = f(x)$. Justifier que $x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y > 0$.
3. Déterminer une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1}.

Exercice 2. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a; b]$ telle que $f(a) = f(b)$. On pose

$$g(t) = f\left(t + \frac{b-a}{2}\right) - f(t).$$

1. Quel est l'ensemble $\mathscr{D}_g$ de définition de g ?
2. Montrer que g admet au moins une valeur d'annulation sur $\mathscr{D}_g$.
3. *Application :* une personne parcours 4 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 min pendant lequel il parcourt exactement 2 km.

Sujet 2

Question de cours. Donner la définition d'une fonction dérivable en $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I telle que

$$\forall x \in I, \qquad f(x)^2 = 1.$$

Montrer que la fonction f est soit la fonction constante égale à 1 sur I soit la fonction constante égale à -1 sur I.

Exercice 2. Soient $a < b$ et f une fonction continue et injective sur $[a; b]$.

1. Justifier que si f n'est pas monotone alors il existe $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant b$ tels que $f(x_1) \geqslant f(y_1)$ ainsi que $a \leqslant x_2 < y_2 \leqslant b$ tels que $f(x_2) \leqslant f(y_2)$.
2. Soit $\varphi : [0; 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(t) = f\left(tx_1 + (1-t)x_2\right) - f\left(ty_1 + (1-t)y_2\right).$$

   Montrer que si f n'est pas monotone alors il existe $t_0 \in [0; 1]$ tel que $\varphi(t_0) = 0$.
3. En déduire que f est nécessairement monotone sur $[a; b]$.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer le théorème de la bijection.

Exercice 1. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit la fonction f_n $[-1;+\infty[$ par

$$\forall x \in [-1;+\infty[, \qquad f_n(x) = \sqrt{x+1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,.$$

1. Soit $n \geqslant 1$. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n
2. Déterminer les extremums de la fonction f_n et préciser s'ils sont locaux ou globaux.
3. Calculer l'abscisse et la valeur du maximum en fonction de n. Quelles sont limites de ces deux dernières quantités lorsque n tend vers l'infini ?
4. Pour tout $n \geqslant 1$ on désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de le fonction f_n. Montrer qu'il existe deux points par lesquels passent toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 0 en fonction de n.
6. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathscr{C}_n$.

Exercice 2.

1. Tracer le tableau de variation de la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$.
2. Soient x et y deux entiers naturels non nuls. Résoudre l'équation $x^y = y^x$.