Colle du 10/10
Fonctions réelles

Sujet 1

Question de cours. Soit $f \in \mathcal{F}(X,Y)$. Donner la définition de la surjectivité de f puis montrer le résultat suivant : f est surjective si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{F}(Y,X)$ telle que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est croissante et que $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 2. On considère l'équation d'inconnu $x > 0$ suivante

$$\ln(x) = 2 - x \tag{E}$$

1. Montrer que (E) possède une unique solution α sur $]0; +\infty[$.
2. Montrer que la solution α appartient à l'intervalle $[1, 2]$.

Sujet 2

Question de cours. Enoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur un sous-ensemble $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathscr{D}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \ln(x)}}.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathscr{D}$ dans $]0; +\infty[$.

Exercice 2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par

$$f(x) = \sin(\pi x) \sin(\pi(x - 1)).$$

Montrer que le graphe représentatif de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 1/2$. Le graphe de la fonction f possède-t-il d'autres axes de symétrie ?

Sujet 3

Question de cours. Enoncer le théorème de dérivabilité de la réciproque d'une fonction.

Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \to [a; b]$ une fonction continue sur $[a; b]$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = x_0$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \cos(x) - \sin(x).$$

1. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Sur quels sous-ensembles de $\mathbb{R}$ peut-on restreindre f pour la rendre injective ?