

Colle du 16/10
Fonctions usuelles

Sujet 1

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a + b)$ et $\cos(a) \sin(b)$.
2. Soit $a > 0$. Calculer en justifiant la limite suivante :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{1/5} (\log_a(x))^3.$$

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:

$$5 \operatorname{ch}(x) - 4 \operatorname{sh}(x) = 3.$$

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions réelles définies par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

1. Donner les ensembles de définition de f et de g .
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = g(x)$.
3. En déduire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right).$$

Sujet 2

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\sin(a + b)$ et $\cos(a) \cos(b)$.
2. Définir et étudier la fonction arc cosinus.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_x(10) = 2 \log_{10x}(10) + 3 \log_{100x}(10).$$

Exercice 2. Pour a et b deux réels, on considère pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme suivante :

$$S_n = \sum_{k=0}^n \operatorname{ch}(a + kb).$$

1. Montrer que

$$S_n = \frac{e^a e^{(n+1)b} - 1}{2 e^b - 1} + \frac{e^{-a} 1 - e^{-(n+1)b}}{2 1 - e^{-b}}$$

2. En déduire que

$$S_n = \frac{\operatorname{ch}\left(a + \frac{nb}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Sujet 3

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\sin(a) \sin(b)$ et $\tan(a + b)$.
2. Définir et étudier la fonction sinus hyperbolique.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:

$$2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}.$$

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}(x)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right).$$