Colle du 13/11
Nombres complexes

Sujet 1

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\tan(a+b)$ et $\sin^2(a)$.
2. Définir l'exponentielle complexe et montrer que pour tout $(\theta, \phi) \in \mathbb{R}^2$, $\mathrm{e}^{it(\theta+\phi)} = \mathrm{e}^{it\theta}\,\mathrm{e}^{it\phi}$.

Exercice 1. Soit A le point du plan $\mathscr{P}$ d'affixe $a = \sqrt{3} - i$.

1. Calculer le module et l'argument de a.
2. On considère la rotation $\mathscr{R}$ de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit f l'application qui à l'affixe z du point $M \in \mathscr{P}$ associe l'affixe z' de $M' = \mathscr{R}(M)$, l'image de M par la rotation $\mathscr{R}$. Exprimer $f(z)$ en fonction de z.
3. Soit $B = \mathscr{R}(a)$ l'image de A par la rotation $\mathscr{R}$. Calculer l'affixe b de B sous forme trigonométrique.
4. Exprimer l'affixe b sous forme algébrique de deux façons différentes et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2.

1. Soient z_1 et z_2 deux complexes. En exprimant z_1 et z_2 en fonction de $z_1 + z_2$ et de $z_1 - z_2$, montrer que
$$|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|\,.$$
2. Interpréter géométriquement cette inégalité.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait égalité.

Sujet 2

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\sin(2a)$ et $\cos(a)\cos(b)$.
2. Exprimer la rotation de centre $A(z_A)$ et d'angle θ.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:
$$\sin(x) + \sin(3x) + \sin(5x) = 0. \qquad \text{((E))}$$

Exercice 2. On note $P = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On considère formellement la fonction
$$f:\quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur P et que pour tout $z \in P$, on a $f(z) \in D$.
2. Montrer que $f : P \to D$ est une bijection.

Sujet 3

Question de cours.

1. Soient a et b deux réels, exprimer $\cos(a+b)$ et $\sin(a)\cos(b)$.
2. Démontrer que tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées.

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser l'expression suivante :

$$\cos^2(x)\sin^3(x).$$

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnu $z \in C$:

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0. \qquad \text{((E))}$$

1. Déterminer les racines carrées de $5 - 12i$.
2. Montrer que l'équation admet une solution imaginaire pure α que l'on déterminera.
3. Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z-\alpha)(az^2 + bz + c).$$

4. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
5. Quelle est la nature du triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Bonus

Exercice 1. Soient A le point du plan d'affixe $z_A = 1$ et B celui d'affixe $z_B = -1$. Déterminer l'ensemble (E) des points M du plan tels que

$$\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$