Colle du 27/11
Sommes, Produits et Systèmes linéaires

Sujet 1

Question de cours. Exprimer $a^n - b^n$ et démontrer cette formule.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

1. Soit $p \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^p$.
2. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \omega^k\right)^n$.
3. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k$.

Sujet 2

Question de cours.

1. Exprimer $\tan(a+b)$.
2. Donner les propriétés de la fonction arcsin.

Exercice 1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x + ay + z = 1 \\ ax + y + (a-1)z = 4 \\ x + y + z = a + 1 \end{cases}$$

Exercice 2. Calculer $\prod_{p=1}^{n} \sum_{k=0}^{p} 2^{p!k}$.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer et démontrer la formule donnant la somme des cubes.

Exercice 3.

1. Soient $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite et $n \in \mathbb{N}$ un entier. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \left(u_k - 2u_{k+1} + u_{k+2}\right).$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^2$ et $k \in [\![1, n]\!]$. Montrer que $k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = n\begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$. En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{n} k\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Soient u_1, u_2, …, $u_p \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $p > n$.

1. Montrer qu'il existe $\lambda_1, \dots \lambda_p \in \mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ tel que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$.
2. En déduire que l'un des vecteurs u_k s'écrit comme combinaison linéaire des autres.