Colle du 11/12
Calculs de primitives et d'intégrales

Sujet 1

Question de cours.

1. Enoncer la formule donnant la somme des n premiers entiers.
2. Enoncer le théorème de changement de variables.

Exercice 1. Soit
$$I = \int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)}{1+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$
A l'aide du changement de variable $u = \pi - t$, calculer I.

Exercice 2. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{x^2+x+2} - x$, calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+x+2}}\,\mathrm{d}x.$$

Sujet 2

Question de cours.

1. Donner la formule du binôme de Newton.
2. Enoncer la propriété garantissant l'unicité de la primitive.

Exercice 1. Soient $a < b$ deux réels et f et g deux fonctions n-fois dérivables sur $[a;b]$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dont la dérivée n-ième est continue sur $[a;b]$. Etablir puis démontrer une formule reliant
$$\int_a^b f(t)g^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f^{(n)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. On considère l'intégrale suivante :
$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Effectuer le changement de variable $t = \pi - x$.
2. En déduire que
$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$
3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$\sin\left(\arctan(u)\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

4. A l'aide du changement de variable $\theta = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer la valeur de I.

Sujet 3

Question de cours.

1. Exprimer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q.
2. Enoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 3. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I.
3. A l'aide du changement de variables $t = 1/x$, calculer à nouveau la valeur de I.

Exercice 4. Soit $f : [0; a] \to [0; b]$ une fonction bijective, croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ telle que sa fonction réciproque f^{-1} soit également $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que
$$\int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = ab.$$
2. Soit $(x, y) \in [0; a] \times [0; b]$. Montrer que
$$\int_0^b f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant xy.$$
3. Discuter du cas d'égalité.