Colle du 12/12
Calculs de primitives et d'intégrales

Sujet 1

Question de cours.

1. Enoncer la formule donnant la somme des carrés des n premiers d'entiers.
2. Enoncer le théorème de changement de variables.

Exercice 1.

1. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$\sin(\arctan(u)) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$
2. A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer l'intégrale suivante
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{2+\sin(x)}.$$

Exercice 2. Calculer la limite suivante :
$$\lim_{\substack{a\to 0\\ a>0}} \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,\mathrm{d}x.$$

Sujet 2

Question de cours.

1. Factoriser $a^n - b^n$.
2. Enoncer la propriété garantissant l'unicité de la primitive.

Exercice 1. A l'aide du changement de variable $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, calculer l'intégrale suivante :
$$I = \int_1^2 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. *(vers le lemme de Riemann-Lebesgue)*
Soient $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Justifier que la fonction dérivée f' est bornée sur $[a;b]$.
2. En déduire que la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,$$
converge vers 0.

Sujet 3

Question de cours.

1. Exprimer la somme des cubes des n premiers entiers.
2. Enoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 3. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\frac{\ln(3)}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x + 2\,\mathrm{e}^{-x}}.$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad f_n(t) = \frac{1}{(1+t^2)^n}.$$

1. Justifier que f_n possède une primitive qui s'annule en 0. On notera cette primitive F_n.
2. Calculer F_1.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\sin\left(\arctan(x)\right) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4. A l'aide du changement de variable $t = \tan(\theta)$, calculer F_2.
5. A l'aide d'une intégration par parties sur F_n, donner une relation entre F_n et F_{n+1}.
6. En déduire F_3.