**Colle du 21/12**
**Calculs de primitives et d'intégrales**

## Sujet 1

**Question de cours.**

1. Enoncer la formule donnant la somme des $n$ premiers entiers.
2. Enoncer le théorème de changement de variables.

**Exercice 1.** Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\left(1 + \tan(x)\right) \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$,
$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos(x) + \sin(x).$$
2. En déduire la valeur de $I$.

**Exercice 2.** *(vers le lemme de Riemann-Lebesgue)*
Soient $a < b$ deux réels et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Justifier que la fonction dérivée $f'$ est bornée sur $[a; b]$.
2. En déduire que la suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par
$$I_n = \int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t,$$
converge vers 0.

---

## Sujet 2

**Question de cours.**

1. Donner la formule du binôme de Newton.
2. Enoncer la propriété garantissant l'unicité de la primitive.

**Exercice 1.** Soit $x > 0$. Calculer

$$I(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t.$$

**Exercice 2.** On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Effectuer le changement de variable $t = \pi - x$.

2. En déduire que
$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(t)} \, \mathrm{d}t.$$
3. Montrer que pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a
$$\sin\left(\arctan(u)\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$
4. A l'aide du changement de variable $\theta = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$, calculer la valeur de $I$.

---

## Sujet 3

**Question de cours.**

1. Exprimer la somme des $n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $q$.
2. Enoncer le théorème d'intégration par parties.

**Exercice 3.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer
$$I(x) = \int_0^x t \sin^3(t) \, \mathrm{d}t.$$

**Exercice 4.** Soit $f : [0; a] \to [0; b]$ une fonction bijective, croissante, de classe $\mathscr{C}^1$ telle que sa fonction réciproque $f^{-1}$ soit également $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que
$$\int_0^b f^{-1}(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^a f(t) \, \mathrm{d}t = ab.$$
2. Soit $(x, y) \in [0; a] \times [0; b]$. Montrer que
$$\int_0^b f^{-1}(t) \, \mathrm{d}t + \int_0^a f(t) \, \mathrm{d}t \geqslant xy.$$
3. Discuter du cas d'égalité.