Colle du 08/01
Equations différentielles et calculs matriciels

Sujet 1

Question de cours. Enoncer puis démontrer le théorème donnant les solutions de l'équation $y'' + ay' + by = 0$ lorsque le discriminant associé est égal à zéro.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)(2x - 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. Montrer que ${}^tAA = A{}^tA$ si et seulement si A est diagonale.

Sujet 2

Question de cours. On considère l'équation $y' + a(x)y = h(x)$. Enoncer les hypothèses suffisantes pour obtenir des solutions et à l'aide de la méthode de la variation de la constante, expliciter ces solutions en fonction de a et de h.

Exercice 1. Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, avec $n \geqslant 2$, définie par $a_{i,i} = 0$, pour tout $i \in [\![1;n]\!]$ et $a_{i,j} = 1$ pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$. Montrer que A est inversible et calculer son inverse.
On pourra calculer $(A + I_n)^2$.

Exercice 2. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) \qquad (1 - x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x\ln(x) - x.$$

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0;1[$.
2. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]1;+\infty[$.
3. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Sujet 3

Question de cours. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$, on a ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(E) \qquad xy'' + 2y' + xy = 0.$$

1. Montrer que la fonction $\varphi :]0;\pi[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est une solution de (E) sur $]0;\pi[$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $]0;\pi[$.

Exercice 4. Déterminer le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire l'ensemble des matrices suivant :

$$\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) | \forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA\}.$$