Colle du 22/01
Dénombrement et révisions

Sujet 1

Question de cours. Enoncer le théorème d'intégration par parties.

Exercice 1. Combien un village doit-il comporter d'habitants pour être sûr que deux personnes au moins aient les mêmes initiales ?

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_n \wedge F_{n+k} = 1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \{1, \dots, n\}$ et E un ensemble de cardinal n. On considère

$$F = \left\{(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2 : A \cap B = \emptyset \text{ et } Card(A \cup B) = p\right\}.$$

1. Calculer le cardinal de F de deux façons différentes.
2. En déduire la formule suivante : $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = 2^n \binom{n}{p}$.

Sujet 2

Question de cours. Définition et propriétés de la fonction arccos.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs $n+1$ et n, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de surjection de E dans F ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_p) \in \mathbb{C}^p$.

1. A l'aide d'un dénombrement, déterminer le coefficient devant $a_1^{k_1} \dots a_p^{k_p}$ lorsque l'on développe $(a_1 + \cdots + a_p)^n$, où $k_1, \dots, k_p$ sont des entiers naturels.
2. En déduire une formule pour $(a_1 + \cdots + a_p)^n$.

Sujet 3

Question de cours. Enoncer le théorème de changement de variable.

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles de cardinaux respectifs p et n. Retrouver le nombre d'injections de E dans F.

Exercice 2. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premier entre eux. Calculer le pgcd et le ppcm de $a+b$ et ab.

Exercice 3. Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \text{Card}\, X = n2^{n-1}.$$