Colle du 05/02
Suites réelles

Sujet 1

Question de cours. Enoncer et démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente.

Exercice 1. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 2. Soient $x > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par $u_0 = x$, $v_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et à termes strictement positifs.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant v_n$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. En déduire la valeur de la limite commune aux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sujet 2

Question de cours. Démontrer que toute suite croissante et majorée converge.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^1$, $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l alors il en est de même pour $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} u_k}$.

1. Montrer que la suite est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
3. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\sqrt{1+x} - 1 \leqslant \frac{x}{2}$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{1}{k}\sum_{k=1}^{n} v_k$. Déterminer la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis à l'aide de l'exercice précédent celle de $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Sujet 3

Question de cours. Démontrer que deux suites adjacentes convergent.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant \sqrt{2}$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{\left|u_n - \sqrt{2}\right|^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2^{2^n - 1}}$ et donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Combien de termes de la suite faut-il calculer pour avoir une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-100} près.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que si $l < 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $l > 1$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. Que dire lorsque $l = 1$?