Colle du 06/02
Suites réelles

Sujet 1

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème des gendarmes.

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et convergeant vers 0. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$. Montrer que les suites $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et en déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 2.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, justifier que l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$ d'inconnu $x \in \mathbb{R}$ admet une unique solution u_n dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Sujet 2

Question de cours. Montrer que toute suite convergente est bornée.

Exercice 1. Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k!$$

Exercice 2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \frac{1+u_n}{1+u_{n+1}} u_{n+1}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et est à termes positifs.
2. Etudier pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de $(u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} - u_n)$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} \leqslant u_{2n+1}$.
4. Préciser la monotonie des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Sujet 3

Question de cours. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergeant respectivement vers l et l'. Démontrer que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$. Que dire du cas complexe ?

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$; $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{\ln(n!)}{n}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} \geqslant \frac{\ln(n)}{2}$.
2. Montrer que $\frac{u_{2n+1}}{u_{2n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et en déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. En déduire que $\frac{1}{\ln(n!)} \sum_{k=1}^{n} \lfloor \ln(k) \rfloor \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.