La loi de Poisson

I Activité d'introduction

Le service technique d'un fabricant d'ascenseurs reçoit en moyenne $\lambda = 1,8$ demande de dépannage par jour. On souhaite connaître la probabilité d'obtenir 3 demandes de dépannage en une journée.

Etape 1 : premier découpage On découpe la journée en $24h$ et on suppose que chaque heure le service peut recevoir 0 ou 1 appel et ceci indépendamment de ce qui s'est passé les heures précédentes. On note X_i le nombre d'appels reçus l'heure i avec $i \in \{1, \ldots, 24\}$ et S le nombre d'appels reçus dans la journée.

1. Quelle est la loi de X_1 ? de X_2 ? Préciser le(s) paramètre(s).
2. Quelle est la loi de S ? Justifier. Préciser le(s) paramètre(s).
3. Dans cette modélisation, calculer la probabilité d'obtenir 3 demandes dans la journée.
4. Quelle(s) critique(s) peut-on faire sur notre modèle ?

Etape 2 : deuxième découpage. On considère désormais que le service de dépannage peut recevoir 0 ou 1 appel par minute.

5. Quelle est la probabilité d'avoir un appel pendant une minute ?
6. On note toujours S le nombre d'appels reçus en une journée. Quelle est la loi et les paramètres de S ?
7. Calculer alors la probabilité d'obtenir 3 demandes dans la journée.
8. Quel est le nombre maximal d'appels que peut recevoir le service de dépannage dans une journée avec ce modèle ?

Etape 3 : découpage quelconque. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On découpe la journée en n intervalles de temps de même taille pendant lesquels le service ne peut recevoir que 0 ou 1 un appel.

9. Quelle est la longueur de chaque intervalle (fraction d'une journée) ?
10. Quelle est la probabilité d'obtenir un appel durant cet intervalle ?
11. Quelle est la loi du nombre total d'appels S_n reçus en une journée ?
12. Exprimer en fonction de n et λ la probabilité suivante : $\mathbb{P}(S_n = k)$.
13. Afin de rendre le modèle le plus précis possible comment devons-nous agir sur les paramètres ?

Etape 4 : découpage infini. On admet que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, il existe un réel $\exp(\lambda) > 0$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \exp(-\lambda).$$

14. En déduire la limite quand n tend vers l'infini de $\mathbb{P}(S_n = k)$.

II La loi de Poisson

Définition II.1

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ si pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

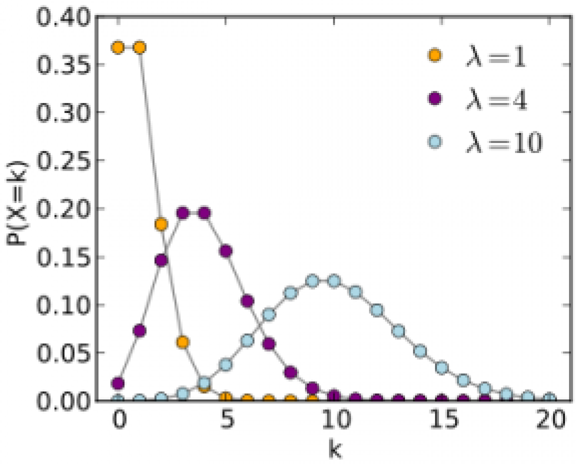
$$\mathbb{P}(X = k) = \exp(-\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors

$$X \sim \mathscr{P}(\lambda).$$

Remarques

- La variable aléatoire X de loi de Poisson ne peut prendre que des valeurs entières. On dit qu'elle est **discrète**.
- Contrairement à loi de Bernoulli ou binomiale, la variable aléatoire X de loi de Poisson peut prendre une **infinité de valeurs** !



III Introduction aux séries

Définition III.1

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. La **série** de terme général u_k est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$S_n = u_0 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exemple 1. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série dont le terme général est donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$u_k = 1.$$

1. Calculer les trois premiers terme de la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Quel est le comportement asymptotique de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exemple 2. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série dont le terme général est donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$u_k = \frac{1}{2^k}.$$

1. Calculer les trois premiers terme de la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Quel est le comportement asymptotique de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exemple 3. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série dont le terme général est donné pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$u_k = (-1)^k.$$

1. Calculer les trois premiers terme de la série $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Quel est le comportement asymptotique de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

IV Série de la loi de Poisson

Nous allons montrer que la série de la loi de Poisson converge dans le cas particulier où $\lambda = 1$.

On fixe $\lambda = 1$ et on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_k = \frac{1}{k!}$. On considère $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de terme général u_k.

1. Démontrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
2. Montrer que pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k!} \leqslant \frac{1}{k(k-1)}$.
3. En déduire que pour tout $n \geqslant 2$,
$$S_n \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right).$$
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n \leqslant 3.$$
5. Démontrer à l'aide des questions précédentes que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
6. En utilisant le fait que la probabilité totale de l'univers est égal à 1, exprimer la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction $\exp(-1)$.

V Propriétés de la loi de Poisson

Proposition V.1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ : $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$. La moyenne de X est alors donnée par
$$\mathbb{E}(X) = \lambda.$$

Démonstration. Par définition de l'espérance, on a :
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k)\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda).\end{aligned}$$

Donc,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \lambda\exp(-\lambda) + 2\frac{\lambda^2}{2!}\exp(-\lambda) + 3\frac{\lambda^3}{3!}\exp(-\lambda) + 4\frac{\lambda^4}{4!}\exp(-\lambda) + \dots\\ &= \lambda\exp(-\lambda) + \lambda^2\exp(-\lambda) + \frac{\lambda^3}{2!}\exp(-\lambda) + \frac{\lambda^4}{3!}\exp(-\lambda) + \dots\\ &= \lambda\left[\exp(-\lambda) + \lambda\exp(-\lambda) + \frac{\lambda^2}{2!}\exp(-\lambda) + \frac{\lambda^3}{3!}\exp(-\lambda) + \dots\right]\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\exp(-\lambda)\\ &= \lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) = \lambda.\end{aligned}$$

□

Proposition V.2

Soient $n \geqslant 1$ et $p \in [0;1]$. Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Si $n > 30$, $p < 0,1$ et si $np(1-p) < 10$ alors *il est possible d'approcher* X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$: pour tout $k \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(X = k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda).$$

VI Application

On considère un médicament prescrit déjà à 10.000 patients sans qu'aucun effet indésirable n'ai été observé. On s'intéresse à la probabilité que sur 1.000.000 de patients, l'un de ces patients développe un effet indésirable conséquent (mort du patient par exemple) qui induirait alors le retrait de la vente de ce médicament. On note p la probabilité d'un patient de développer un effet indésirable et X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes développant un effet indésirable.

1. Si $n = 10.000$ quelles sont les valeurs de p valides pour approcher X par une loi de Poisson.

On dit d'un évènement A qu'il est vraisemblable (respectivement invraisemblable) au niveau de confiance α si $\mathbb{P}(A) \geqslant 0,05$ (respectivement $\mathbb{P}(A) \leqslant 0,05$). On souhaite déterminer les valeurs de p pour lesquelles le fait qu'aucun patient n'ai développé d'effet indésirable soit vraisemblable. On cherche donc p tel que

$$\mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0,05.$$

Or par l'approximation par une loi de Poisson, on a $\mathbb{P}(X = 0) \approx \exp(-\lambda)$ avec $\lambda = np$. Donc

$$\mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0,05 \Leftrightarrow \exp(-np) \geqslant 0,05$$

On admet que cela revient à résoudre l'inégalité suivante (la fonction exp sera vue en terminale) :

$$\mathbb{P}(X = 0) \geqslant 0,95 \Leftrightarrow -np \geqslant -3.$$

2. En déduire les valeurs de p possibles.

On pose p_0 la plus grande valeur possible de p parmi les valeurs rendant l'absence d'effet indésirable parmi 10.000 vraisemblable.

3. Suivant cette valeur, quelle serait le nombre moyen d'individus présentant des effets indésirables si l'on prescrit ce médicament à 1.000.000 patients ?
4. Calculer la probabilité qu'aucun patient parmi 1.000.000 ne présente d'effet indésirable.

Denis POISSON *(1781-1840).*

« La vie n'est bonne qu'à deux choses : à faire des mathématiques et à les professer ».

Ce mathématicien français commence des études de médecine auprès d'un oncle chirurgien. Agé de dix-sept ans et après avoir déjà causé la mort de plusieurs patients, Denis Poisson se trompe sur l'heure de son cours d'histoire naturelle et tombe accidentellement sur un cours de mathématiques. Ayant trop peu d'auditeurs le professeur empêche Denis Poisson de sortir. Tout de suite passionné, il suivit par la suite ce cours, abandonna la médecine et se lança dans les études de mathématiques. A dix-huit ans il est reçu premier à l'Ecole de Polytechnique et obtient de nombreuses récompenses lors de sa carrière. Il devient membre de l'Académie des sciences en 1812, est fait baron par Louis XVIII et obtient un siège à la chambre des pairs en 1832. Il est très vite soutenu par Laplace et Lagrange. Sa profonde compréhension des notions d'analyse et de leurs applications en mécanique, électricité ou probabilité font de lui l'un des plus grands scientifiques de la première moitié du dix-neuvième siècle.