Chapitre I : Second degré

I Fonctions polynômes de degré 2

I.1 Définitions

Définition I.1

Une fonction **polynôme** f **de degré 2**, ou du second degré, est une fonction qui s'exprime, pour tout nombre réel x, sous la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où a, b et c sont des réels, avec $a \neq 0$.

- Les réels a, b et c sont les coefficients de la fonction polynôme f.
- Le coefficient c est l'ordonnée à l'origine de la fonction polynôme f.
- Le polynôme $ax^2 + bx + c$ est parfois appelé *trinôme* (car il possède trois monômes : ax^2, bx et c).

→ Exemple : la fonction carré, la fonction $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$, pour tout réel x.

Définition I.2

La courbe représentative $\mathscr{P}$ associée à une fonction polynôme f de degré 2 est appelé une **parabole**.

→ Activité 1.

I.2 Tableau de variation

Dans cette partie on fixe f une fonction polynôme du second degré, définie pour tout réel x par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$. On note également $\mathscr{P}$ sa parabole associée.

Proposition I.3

La parabole $\mathscr{P}$ est orientée « vers le haut » lorsque ....
et est orientée « vers le bas » lorsque ....

Application : Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions définies pour tout réel x par

$$f_1(x) = \frac{3}{31}x^2 + x + 12\,; \qquad f_2(x) = x^2 - \frac{1}{4}\,;$$

$$f_3(x) = -2x^2 + 7x - 4\,; \qquad f_4(x) = 3x - 5.$$

Parmi les paraboles associées à ces fonctions polynômes, lesquelles sont orientées vers le haut ?

....

vers le bas ? ....
Attention, un intrus s'est glissé dans la liste.

Proposition I.4

La fonction polynôme f admet un unique extremum dont l'abscisse est donnée par

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

Application : Soient f_1, f_2, f_3 et f_4 quatre fonctions définies pour tout réel x par

$$f_1(x) = x^2 - 3x + \frac{4}{3}\,; \qquad f_2(x) = -3x^2 + 8x + 1\,;$$

$$f_3(x) = 5x^2 - 4\,; \qquad f_4(x) = -3x^2 + 21x + \frac{9}{5}.$$

Pour chacune de ces fonctions, donner l'abscisse de l'extremum.

Pour f_1, $x_0 = \dots\dots\dots$ Pour f_2, $x_0 = \dots\dots\dots$

Pour f_3, $x_0 = \dots\dots\dots$ Pour f_4, $x_0 = \dots\dots\dots$

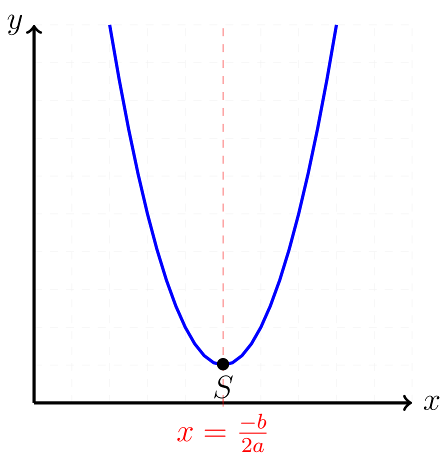
- Le point extremum S de coordonnées $\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ est aussi appelé le *sommet* de la parabole.
- Le sommet S est un .... lorsque $a > 0$,
- Le sommet S est un .... lorsque $a < 0$.

Proposition I.5

La parabole $\mathscr{P}$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

- La droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ est parallèle à l'axe des ordonnées.
- Le sommet S appartient à la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.

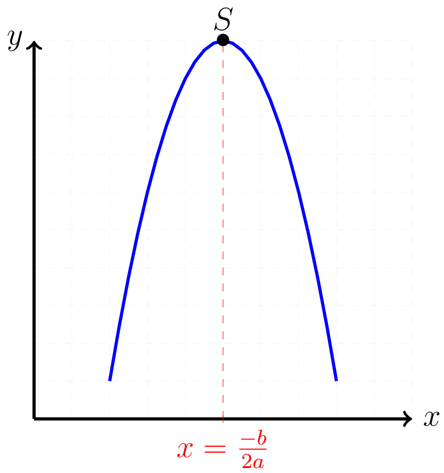
Le cas **a** $>$ **0**



x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$ $+\infty$

- La fonction polynôme f est strictement .... sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$.
- La fonction polynôme f est strictement .... sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.
- Le sommet $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ est un ....

Le cas $\mathbf{a} < \mathbf{0}$



x	$-\infty$	$\frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	$f\left(\frac{-b}{2a}\right)$	$\nearrow$ $+\infty$

- La fonction polynôme f est strictement .... sur $\left]-\infty; \frac{-b}{2a}\right]$.
- La fonction polynôme f est strictement .... sur $\left[\frac{-b}{2a}; +\infty\right[$.
- Le sommet $S\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ est un ....

II Equations du second degré

Soit f une fonction polynôme de degré 2 s'écrivant pour tout réel x,

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec a, b et c trois réels et $a \neq 0$.

II.1 Le discriminant

Définition II.1

On appelle **discriminant** de f le réel $b^2 - 4ac$. On note Δ (lire « delta ») ce réel :

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Application 1. Pour chacune des fonctions suivantes, exprimer les coefficients a, b et c puis calculer le discriminant Δ associé.

$f_1(x) = 0,5x^2 + 2x - 2,5\,;$ $f_2(x) = -2x^2 + 4x - 2\,;$ $f_3(x) = x^2 - 5x + 7\,;$
$f_4(x) = x^2 - 6x + 8\,;$ $f_5(x) = 2x^2 - 2x + 0,5\,;$ $f_6(x) = 3x^2 - x + 2.$

	a	b	c	Δ
f_1				
f_2				
f_3				
f_4				
f_5				
f_6				

II.2 Résolution de $ax^2 + bx + c = 0$

Soient a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. On cherche à déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ (s'il en existe) vérifiant l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad \text{(S)}$$

Définition II.2

Une solution de l'équation (S) est une **racine** de la fonction polynôme f.

Proposition II.3

Trois cas différents se présentent pour résoudre (S) :

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors (S) possède deux solutions (deux racines) <u>distinctes</u> :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors (S) possède une <u>unique</u> solution (racine) :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors (S) ne possède une <u>aucune</u> solution (racine).

Remarque : lorsque $\Delta = 0$, l'unique racine $x_0 = \frac{-b}{2a}$ est l'extremum de la fonction f (voir la Proposition I.3).

Application 2. On reprend les fonctions de l'application II.1. Pour chacune des fonctions, déterminer le nombre de racines associé et calculer ces racines lorsqu'elles existent.

....

....

....

....

....

....

II.3 Forme factorisée

Proposition II.4

On reprend les notations de la Proposition II.3.

- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ alors f s'écrit sous forme factorisée de la façon suivante :

$$f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors f s'écrit sous forme factorisée de la façon suivante :

$$f(x) = a\,(x - x_0)^2\,.$$

- Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors f n'a pas de forme factorisée.

Application 3. Factoriser, lorsque c'est possible, chacune des fonctions de l'application II.1.