Corrigé du Devoir Maison 1

Solution de l'exercice 1.

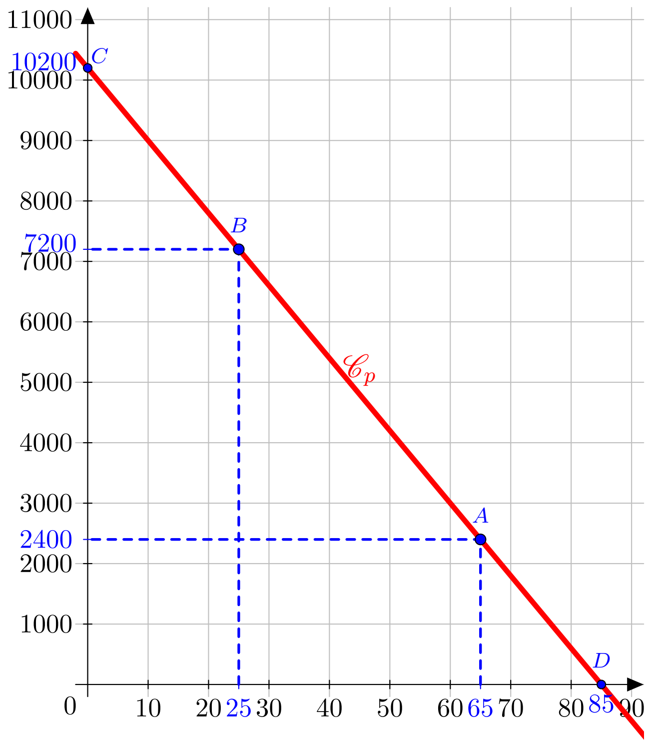
Partie A. Etude du nombre de passagers.

1. Par définition, le nombre de passagers intéressés par le voyage lorsque le billet vaut $x = 65$ € est donné par
$$p(65) = 10200 - 120 \times 65 = 2400.$$

2. On suppose que 7200 personnes sont intéressées par le voyage. Soit x le prix du billet associé. On a donc $p(x) = 7200$ c'est-à-dire
$$\begin{aligned} & 10200 - 120x = 7200 \\ \Leftrightarrow\ & 10200 = 7200 + 120x \\ \Leftrightarrow\ & 10200 - 7200 = 120x \\ \Leftrightarrow\ & 3000 = 120x \\ \Leftrightarrow\ & x = \frac{3000}{120} = 25. \end{aligned}$$
On conclut que pour que 7200 personnes soient intéressées par le voyage, il faut fixer le prix à $x = 25$ €.

3. Si le billet est gratuit, $x = 0$ alors le nombre de personnes intéressées est de $p(0) = 10200$. Au contraire, lorsque le prix du billet est de 85 €, alors on a $p(85) = 10200 - 120 \times 85 = 0$ personne intéressée par le voyage.

4. La fonction p est une fonction affine dont l'ordonnée à l'origine est de 10200 et dont la pente est de -120. Cette pente est négative, on en déduit donc que p est décroissante sur $[0; 85]$.



Partie B. Etude de la recette.

1. (a) Si le prix du billet vaut x € alors chaque voyageur va payer x €. Or on sait par la partie 1 que si le billet vaut x € alors $p(x)$ personnes vont faire le voyage et donc acheter un billet. Au total la recette est donc de

$$R(x) = p(x) \times x = (10200 - 120x) \times x = 10200x - 120x^2 = -120x^2 + 10200x.$$

   (b) Si $x = 10$ €, alors

$$R(10) = -120 \times 10^2 + 10200 \times 10 = 90\,000\,€.$$

   Si $x = 42,5$ €, alors

$$R(42,5) = -120 \times 42,5^2 + 10200 \times 42,5 = 216\,750\,€.$$

   Si $x = 50$ €, alors

$$R(50) = -120 \times 50^2 + 10200 \times 50 = 210\,000\,€.$$

   Si $x = 60$ €, alors

$$R(60) = -120 \times 60^2 + 10200 \times 60 = 180\,000\,€.$$

2. (a) Puisque le coefficient $a = -120 < 0$ est négatif, on en déduit que la parabole est orientée vers le bas et que donc le sommet de la parabole est un maximum (ce qui est cohérent avec les quatre valeurs calculées à la question précédente, valeurs qui augmentent puis diminuent).

   (b) Soit x_0 l'abscisse du sommet. Cette abscisse est donnée par

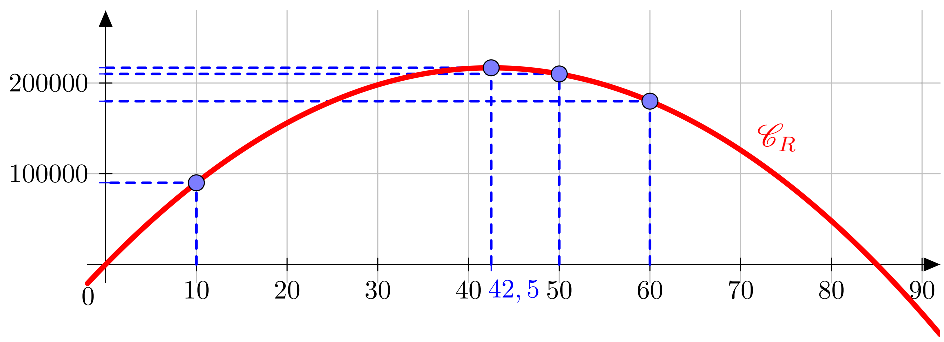
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-10200}{2 \times (-120)} = \frac{10200}{240} = \frac{510}{12} = \frac{255}{6} = 42,5.$$

   (c) Puisque le sommet est un maximum, il correspond à la recette (on parle de la fonction R) maximale que peut espérer le voyagiste. Les abscisses représentent ici le prix du vol. On en déduit que x_0 correspond au prix que doit fixer le voyagiste pour avoir une recette maximale.

   (d) Cette recette maximale est alors donnée par $R(x_0) = R(42,5)$. Par la question 1.(b), on en déduit que la recette maximale est donnée par $R(x_0) = 216\,750\,€$.

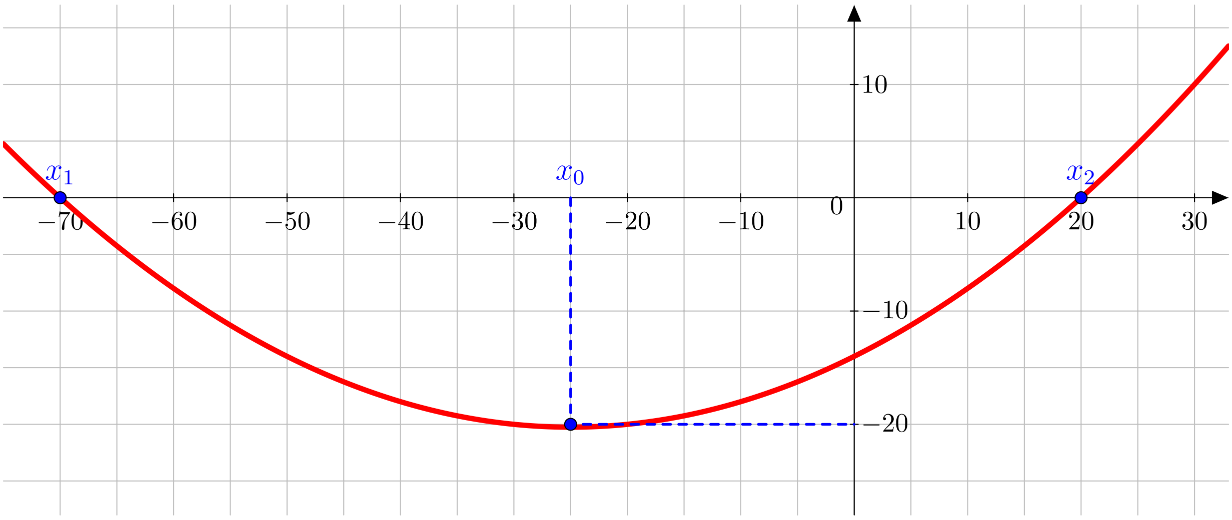
   (e) Le nombre de voyageurs intéressés si le prix du billet est de $x_0 = 42,5\,€$ est alors donné par

$$p(x_0) = p(42,5) = 10200 - 120 \times 42,5 = 5100.$$



Solution de l'exercice 2.

1. Les frais fixes de l'artisan sont donnés par le coût qu'il doit payé alors qu'il ne produit aucun meuble : $C(0) = 900$ €.
2. S'il produit 30 meubles, l'artisan doit payer $C(30) = 30^2 + 50 \times 30 + 900 = 900 + 1500 + 900 = 3300$ €.
3. Le sommet de C a pour abscisse
$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-50}{2 \times 1} = -25.$$
4. On calcule également la valeur de la fonction à cette abscisse $x_0 = -25$:
$$C(-25) = (-25)^2 + 50 \times (-25) + 900 = 625 - 1250 + 900 = 1525 - 1250 = 275 \text{ €}.$$
De plus $a = 1 > 0$, donc la parabole est orientée vers le haut. On en déduit le tableau de variation suivant :
$$\begin{array}{|c|ccccc|}
\hline
x & -\infty & & -25 & & +\infty \\
\hline
 & +\infty & & & & +\infty \\
C(x) & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & 275 & & \\
\hline
\end{array}$$
5. A l'aide du tableau de variation, on voit que la fonction C est croissante sur $[-25; +\infty[$ et donc notamment sur $[0; 60]$.
6. On suppose que le coût de production de l'artisan est de 2300 €. Soit x le nombre de meubles produits pour un tel coût. On a alors
$$\begin{aligned}
& C(x) = 2300 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 50x + 900 = 2300 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 50x + 900 - 2300 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + 50x - 1400 = 0.
\end{aligned}$$
7. Le discriminant est donné par
$$\Delta = b^2 - 4ac = 50^2 - 4 \times 1 \times (-1400) = 2500 + 5600 = 8100.$$
8. Puisque $\Delta > 0$, on sait que l'on aura deux solutions de l'équation $x^2 + 50x - 1400 = 0$. De plus ces solutions sont données par
$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 - \sqrt{8100}}{2 \times 1} = \frac{-50 - 90}{2} = -\frac{140}{2} = -70 \\
x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-50 + \sqrt{8100}}{2 \times 1} = \frac{-50 + 90}{2} = \frac{40}{2} = 20.
\end{aligned}$$
9. Il est évident qu'un nombre de meubles négatif $x_1 = -70 < 0$ n'a aucun sens concret. L'unique solution de notre problème entre $[0; 60]$ est donc $x_2 = 20$. Avec 2300 €, l'artisan peut produire 20 meubles.


x_1
x_0
x_2
-70
-60
-50
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
10
-10
-20