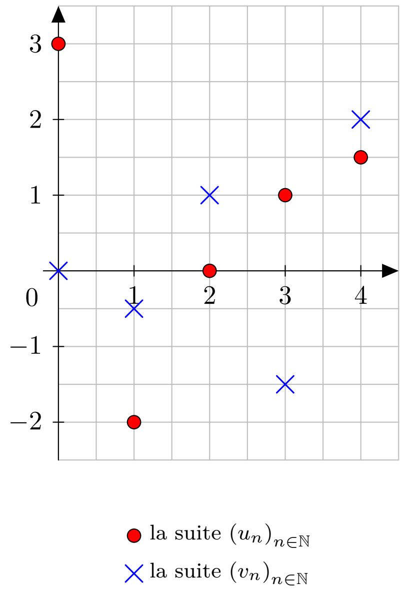
Corrigé du Contrôle 3

Solution de l'exercice 1.



1. Par lecture graphique, on trouve que

$$u_0 = 3, \qquad u_2 = 0 \quad \text{et} \quad u_4 = 1,5.$$

2. On observe que dans les termes représentés graphiquement ci-dessus, seul u_3 vaut 1 : $u_3 = 1$. Donc **l'indice** recherché est $n = 3$.
3. Cette suite n'est pas croissante car $u_1 = -2 < u_0 = 3$ mais elle n'est pas décroissante non plus car $u_2 = 0 > u_1 = -2$. Elle n'est donc ni croissante ni décroissante.
4. En utilisant la formule avec $n = 0$, 1, 2, 3 et 4, on trouve les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4
v_n	0	$\frac{-1}{2}$	1	$\frac{-3}{2}$	2

5. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est représentée dans le graphique ci-dessus par $\times$.
6. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante car $v_1 = \frac{-1}{2} < v_0 = 0$ mais elle n'est pas décroissante non plus car $v_2 = 1 > v_1 = \frac{-1}{2}$. Elle n'est donc ni croissante ni décroissante.

Solution de l'exercice 2.

1. Puisque Kassandra augmente ses économies de 8 € par semaine, elle aura la semaine $n + 1$, 8€ de plus que la semaine n :
$$u_{n+1} = u_n + 8.$$
2. On constate donc que $u_{n+1} > u_n$ et ceci pour tous les entiers $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

3. On suppose la tirelire de Kassandra vide avant la première semaine : $u_0 = 0$. Elle obtient pour la première semaine
$$u_1 = 8\,€.$$
Puis la deuxième semaine, elle a
$$u_2 = u_1 + 8 = 8 + 8 = 16\,€.$$
4. En continuant de calculer les termes de la suite, on trouve $u_3 = 16 + 8 = 24\,€$, $u_4 = 24 + 8 = 32\,€$. Donc à la quatrième semaine, Kassandra aura gagné $32\,€$.
5. *(Bonus)* Lorsque Kassandra dépense ses économies lorsqu'elles atteignent $32\,€$, la définition de la suite devient :
$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 8 & \text{si} \quad u_n < 32 \\ u_{n+1} = 0 & \text{si} \quad u_n = 32 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 3.

1. Par définition, u_0 est le nombre de personnes de moins de 20 ans l'année $2015 + 5 \times 0 = 2015$. Donc d'après l'énoncé,
$$u_0 = 30000.$$
De la même façon, v_0 est le nombre de personnes de plus de 60 ans l'année 2015 donc
$$v_0 = 25000.$$
2. Cinq ans plus tard, le nombre de personnes de moins de 20 ans aura augmenté de 500 personnes. On a donc
$$u_1 = u_0 + 500 = 30000 + 500 = 30500.$$
3. De la même façon, on a
$$\begin{aligned} u_2 &= u_1 + 500 = 30500 + 500 = 31000, \\ u_3 &= u_2 + 500 = 31000 + 500 = 31500, \\ u_4 &= u_3 + 500 = 31500 + 500 = 32000. \end{aligned}$$
4. Nous l'avons vu à travers les premiers exemples, u_{n+1} est égal à u_n (le nombre de personnes de moins de 20 cinq ans plus tôt) plus 500. C'est-à-dire
$$u_{n+1} = u_n + 500.$$
5. u_{n+1} admet 500 personnes de plus que u_n donc naturellement
$$u_{n+1} > u_n.$$
Ceci étant vrai pour tous $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
6. Puisque la population de plus de 60 ans augmente de 10% tous les cinq ans, on en déduit que le nombre de **nouvelles** personnes ayant plus de 60 ans est égal à 10% de la population précédente. Pour 2020, on prend donc 10% de la population de plus de 60 ans de 2015 :
$$\frac{10}{100} \times v_0 = \frac{10}{100} \times 25000 = 2500.$$

7. Le nombre total de personnes ayant plus de 60 ans en 2020 est donc égal à la population précédente plus les 10% que l'on ajoute :

$$v_1 = v_0 + 2500 = 25000 + 2500 = 27500.$$

Notons que l'on peut retrouver ce résultat directement en appliquant une évolution de 10% à v_0 :

$$v_1 = \left(1 + \frac{10}{100}\right) v_0 = (1 + 0,1) \times 25000 = 1,1 \times 25000 = 27500.$$

8. Par la formule précédente, on a

$$v_2 = (1,1)^2 \times 25000 = 30250$$
$$v_3 = (1,1)^3 \times 25000 = 33275$$
$$v_4 = (1,1)^3 \times 25000 = 36602,5 \simeq 36602.$$

9. Grâce aux questions 2, 3, 7 et 8, on voit que

$$u_0 > v_0, \qquad u_1 > v_1 \qquad u_2 > v_2$$

mais

$$u_3 < v_3 \qquad u_4 < v_4.$$

Ainsi sur les premiers termes on voit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dépasse la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à partir du rang $n = 3$.

10. L'indice $n = 3$ correspond à l'année $2015 + 5 \times 3 = 2015 + 15 = 2030$. A partir de 2030, la population de plus de 60 ans sera plus nombreuse que la population de moins de 20 ans.

11. *(Bonus)* Dans la case $B1$, il faut rentrer la formule suivante :

$$= 30000 + 500 * A1$$