Correction du Contrôle 5 Dérivation de degré 3 et schéma de Bernoulli

Solution de l'exercice 1.

1. Le nombre de malades le jour 0 est donné par $M(0) = 45 \times 0^2 - 0^3 = 0$. Le jour 25, le nombre de malades est donné par $M(25) = 45 \times 25^2 - 25^3 = 12500$.
2. En appliquant la formule du cours avec $a = -1$, $b = 45$, $c = 0$ et $d = 0$, on obtient
$$M'(t) = 3at^2 + 2bt + c = -3t^3 + 2 \times 45t + 0 = -3t^2 + 90t.$$
3. Au jour $t = 5$, on obtient une vitesse de propagation de
$$M'(5) = -3 \times 5^2 + 90 \times 5 = -3 \times 25 + 450 = -75 + 450 = 375.$$
4. Le coefficient a de la parabole associée à M' vaut $a = -3$ et est donc négatif. Donc la parabole est orientée vers le bas.
5. On en déduit que la parabole admet un maximum.
6. L'abscisse de ce sommet est
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-90}{2 \times (-3)} = \frac{-90}{-6} = 15.$$
Donc son ordonnée est $M'(x_S) = M'(15) = -3 \times 15^2 + 90 \times 15 = 675$.
7. Grâce aux questions précédentes, on en déduit le tableau de variations suivant :

t	$-\infty$		15		$+\infty$
M'	$-\infty$	$\nearrow$	675	$\searrow$	$-\infty$

8. Puisque $M'(0) = -3 \times 0^2 + 90 \times 0 = 0$, on en déduit que 0 est une racine de M'. De même $M'(30) = -3 \times 30^2 + 90 \times 30 = -2700 + 2700 = 0$ et donc 30 est la seconde racine de M'.
9. On en déduit le tableau de signe de M' :

t	$-\infty$		0		30		$+\infty$
$M'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

10. On rappelle que, par une propriété du cours, la fonction M est croissante quand M' est positive et inversement M est décroissante lorsque M' est négative. Donc

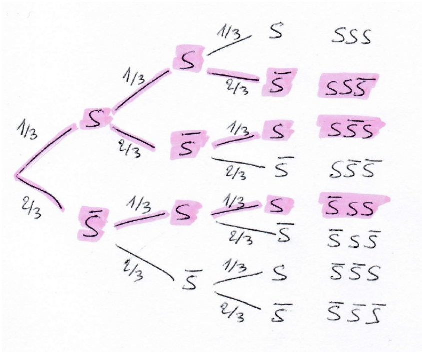
t	$-\infty$		0		30		$+\infty$
M	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	13500	$\searrow$	$-\infty$

Il était possible de compléter les valeurs du tableau en rappelant que $M(0) = 0$ et en calculant $M(30) = 45 \times 30^2 - 30^3 = 13500$.

11. Par lecture du tableau de variations précédent, M est croissante sur $[0; 30]$ donc sur $[0; 25]$.

Solution de l'exercice 2.

1. Wassim possède 3 billes rouges parmi $3 + 4 + 2 + 3 = 12$ billes. La probabilité de piocher une bille rouge est de $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$. De même la probabilité de piocher une bille verte est de $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, la probabilité de piocher une bille bleue de $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Enfin la probabilité de piocher une bille jaune est de $\frac{3}{12} = \frac{1}{4}$.
2. Le succès est S : « obtenir une bille verte ». L'échec est donc $\bar{S}$: « ne pas obtenir une bille verte » ou encore « obtenir une bille rouge, bleue ou jaune ».
3. Le succès étant d'obtenir un bille verte, la probabilité d'obtenir un succès est de $p(S) = \frac{1}{3}$. La probabilité d'obtenir un échec est donc de $p(\bar{S}) = 1 - p(S) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
4. L'expérience de Bernoulli est le fait de piocher une fois une bille (et de gagner si l'on obtient une bille verte) et le schéma de Bernoulli est constitué de la répétition à trois reprises de cette expérience.
5. Le tirage doit être effectué avec remise afin que les probabilités de succès ou d'échec restent identiques d'une fois sur l'autre. Par définition un schéma de Bernoulli nécessite la répétition d'une même expérience à **l'identique**.
6. Le nombre de tirage n est de 3, et la probabilité p d'un succès est de $\frac{2}{3}$ (voir la question 2).
7.
8.



9. On déduit de l'arbre la probabilité de A :

$$p(A) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}.$$

10. Pour être dans B il faut avoir eu un succès, un échec, un succès OU un échec, un succès, un succès dans cet ordre. Autrement dit :

$$B = \left\{ S\bar{S}S, \bar{S}SS \right\}.$$

11. Donc

$$\begin{aligned} p(B) = p\left(S\bar{S}S\right) + p\left(\bar{S}SS\right) &= p(S) \times p\left(\bar{S}\right) \times p(S) + p\left(\bar{S}\right) \times p(S) \times p(S) \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{27} + \frac{2}{27} \\ &= \frac{4}{27}. \end{aligned}$$