Problèmes du chapitre 4

Problème 1. Jimmy souhaite imiter en vraie grandeur dans son jardin un célèbre jeu où l'on lance des oiseaux à l'aide d'un lance-pierre pour faire tomber des boîtes de conserve. Les boites se trouvent au sol à une distance de $L = 50\ m$ de Jimmy qui tient son lance-pierre à une hauteur $h = 1,5\ m$. En l'absence de frottement (on suppose le projectile bien profilé), les équations de Newton donnent

$$x(t) = v_x t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t + h,$$

où

- $x(t)$ est l'abscisse de la trajectoire en fonction du temps,
- $y(t)$ l'ordonnée de la trajectoire en fonction du temps,
- v_x la composante horizontale de la vitesse initiale, on suppose qu'elle vaut $v_x = 20\ m/s$,
- v_y la composante verticale de la vitesse initiale,
- g la constante de la gravitation dans le jardin de Jimmy, $g = 10\ m/s^2$.

On souhaite connaitre la vitesse $(v_x; v_y)$ avec laquelle Jimmy doit lancer son projectile pour atteindre ses boîtes.

1. Quelle est la dérivée de $t \mapsto x(t)$?
2. Montrer que $t = \frac{x}{v_x}$.
3. En déduire que $y(x) = -\frac{g}{2v_x^2}x^2 + \frac{v_y}{v_x}x + h$.
4. Quelle est l'ordonnée à l'origine de la fonction $x \mapsto y(x)$?
5. Comment est orientée la parabole associée à y ? Justifier.
6. Faire un schéma de la situation.
7. Dériver y.
8. Calculer $y'(0)$.

On note $v_0 = y'(0)$.

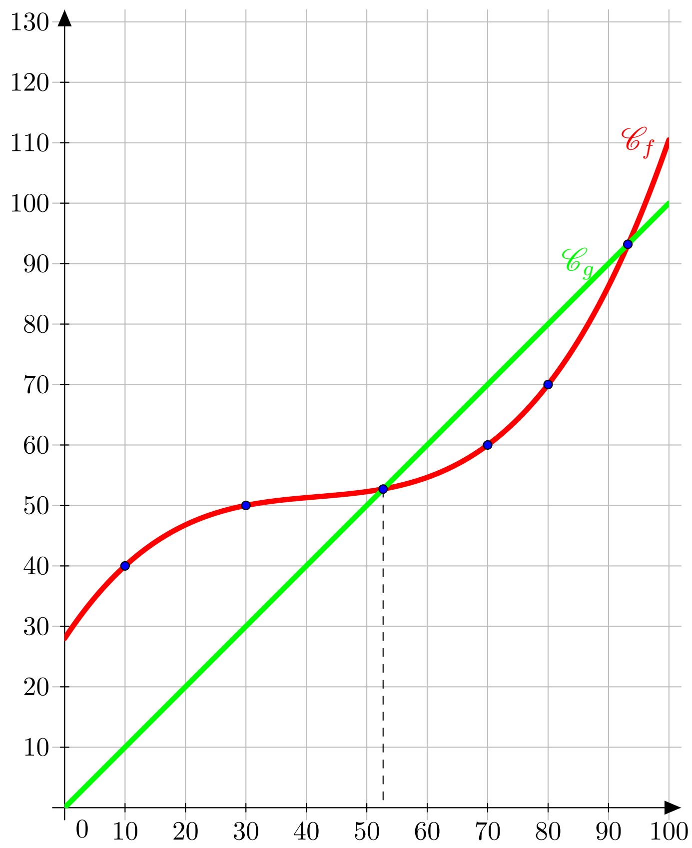
9. Vérifier que $y(x) = -0,0125x^2 + v_0 x + 1,5$.
10. Exprimer le discriminant de y en fonction de v_0.
11. Quel est son signe ? Justifier.

Pour faire en sorte que le projectile atteigne les boîtes il faut que la parabole coupe l'axe des abscisses à $x = 1,5$. En cherchant les racines de y, on trouve que le projectile atteint les boîtes pour

$$v_0 = 0,595\ m/s.$$

12. Que représente v_0 par rapport à la tangente à la parabole au point $(0; 1,5)$?
13. En déduire v_y.

Problème 2. Soit f la fonction qui pour tout nombre q d'objets produits par une usine retourne $f(q)$ le coût, en euro, associé à cette production. On note g la fonction qui pour tout nombre q d'objets produits retourne $g(q)$ la recette qu'engendrera la production de ces q objets. On donne $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de f, respectivement de g dans le graphique ci-dessous.



14. Quel est, graphiquement, le sens de variation du coût ?
15. Quel est le montant des coûts fixes (c'est-à-dire le prix que doit payer l'entreprise même quand elle ne produit aucun objet) ?
16. A partir de quelle quantité fabriquée, le coût total est-il supérieur ou égal à 60 € ?
17. Pour quelles quantités le coût total est-il inférieur ou égal à 90 € ?

On suppose pour les questions que la fonction **chiffre d'affaires** est définie par $g(q) = q$.

18. Lire le coefficient directeur de $\mathscr{C}_g$.
19. Calculer le chiffre d'affaires correspondant à 70 objets fabriqués et vendus.

Le **bénéfice** correspond à la différence entre le chiffre d'affaires et le coût total.

20. Dans quel intervalle doit varier la quantité d'objets produits et vendus pour que le bénéfice soit positif ?
21. Donner la valeur du bénéfice pour les quantités suivantes : 10, 30, 55, 70 et 90 objets.

On suppose désormais que chaque objet est vendu $0,80$ €.

22. Calculer le chiffre d'affaires pour 100 objets fabriqués et vendus.
23. Exprimer le chiffre d'affaires $h(q)$ pour la vente de toute quantité d'objets q entre 0 et 100.
24. Tracer $\mathscr{C}_h$ sur le graphique ci-dessus.
25. Cette entreprise peut-elle réaliser des bénéfices avec ce prix unitaire de vente ?