Chapitre XI : La fonction inverse

I Définition

On rappelle que $\mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$ est l'ensemble des réels différents de 0.

Définition I.1

La **fonction inverse** f est la fonction qui à tout réel NON NUL associe son inverse :

$$f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$$
$$x \mapsto \frac{1}{x}.$$

II Représentation

Compléter le tableau suivant :

x		-4	-2	-1	$-1/2$		$-1/5$	0
$\frac{1}{x}$	$-0,2$					-4		

x	$1/5$		$0,5$	1	2	4	
$\frac{1}{x}$		4					$0,2$

A l'aide du tableau précédent, tracer la courbe représentative de la fonction inverse sur le graphique en annexe.

III Propriétés

Proposition III.1

La fonction inverse est

- négative sur $]-\infty; 0[$
- positive sur $]0; +\infty[$.

Son tableau de signes est donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		||	

Proposition III.2

La fonction inverse est

- décroissante sur $]-\infty; 0[$,
- décroissante sur $]0; +\infty[$.

Son tableau de variations est donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

Démonstration. Soit $x \leqslant y < 0$. On constate que $xy > 0$. En conséquence :

$$\frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy} < \frac{0}{xy} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} < 0.$$

On en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$. De même pour $0 < x < y$, on a toujours $xy > 0$. Ainsi

$$\frac{0}{xy} < \frac{x}{xy} \leqslant \frac{y}{xy} \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x}.$$

A nouveau on en déduit que la fonction inverse est décroissante sur $]0; +\infty[$. □

IV Signige d'un quotient

On considère la fonction suivante :

$$f : x \mapsto \frac{-3x+8}{5x-20}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?

Les seuls points $x \in \mathbb{R}$ qui peuvent poser problème sont ceux pour lesquels le dénominateur s'annule (on ne divise jamais par 0 !) :

$$\begin{aligned} 5x - 20 = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad 5x = 20 \\ &\Leftrightarrow \qquad x = \frac{20}{5} = 4. \end{aligned}$$

Donc la fonction n'est pas définie en 4. Son ensemble de définition est donc $\mathbb{R} \setminus \{4\}$.

2. Dresser le tableau de signes de f.

De la même façon que pour le degré 2, on a d'une part

$$\begin{aligned} -3x + 8 \geqslant 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad -3x \geqslant -8 \\ &\Leftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
$-3x+8$		0	

D'autre part, on a aussi :

$$\begin{aligned} 5x - 20 \geqslant 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 5x \geqslant 20 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{20}{5} = 4. \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$	4	$+\infty$
$5x-20$		0	

En réunissant ces deux tableaux, on en déduit que

x	$-\infty$	$\frac{8}{3}$		4	$+\infty$
$-3x+8$		0			
$5x-20$				0	
$\frac{-3x+8}{5x-20}$		0		0	

Annexe