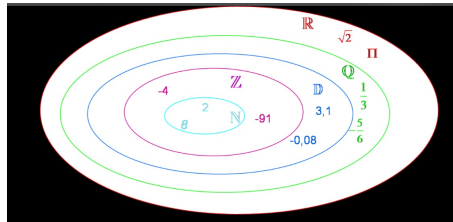




# Chapitre II : Etude qualitative de fonctions

## I Définition

### I.1 Les ensembles



- L'ensemble  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des **entiers naturels** : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 13975 ; ...
- L'ensemble  $\mathbb{Z}$  est l'ensemble des **entiers relatifs** : ... ; -98745432 ; ... ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; ... ; 13975 ; ...
- L'ensemble  $\mathbb{D}$  est l'ensemble des **nombre décimaux**, c'est-à-dire s'écrivant avec un nombre fini de chiffres derrière la virgule : 15, 789 ; -47 ; -24, 9876 ; 3 ;  $\frac{1837}{10000}$  ; ...
- L'ensemble  $\mathbb{Q}$  est l'ensemble des **rationnels**, c'est-à-dire les nombres pouvant s'écrire comme une fraction d'un entier relatif divisé par un entier relatif non nul :  $\frac{1}{3}$  ; -4 ;  $-9374,94 = \frac{-937494}{100}$  ;  $\frac{12390}{4485}$  ; ...
- L'ensemble  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des nombres **réels** regroupant les rationnels et les irrationnels :  $\sqrt{2}$  ; 4 ;  $\frac{759}{8094}$  ;  $\pi$  ; -948 ;  $\sqrt{5}$  ; ...

Ces ensembles sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

### I.2 Définition d'une fonction

#### Définition I.1

Une **fonction**  $f$  partant d'un ensemble  $A$  et allant dans un ensemble  $B$ , notée  $f : A \rightarrow B$ , est un opérateur qui a tout élément  $a \in A$  lui associe un unique élément de  $f(a) = b \in B$ .

**Exemple 1.** Associer à tout élément sa nature :

$f_1$

Jupiter •	
Soleil •	• planète
Antarès •	
Terre •	• lune
Titan •	
Tatooine •	• étoile
Pandora •	



Donner alors  $f_1(\text{Jupiter}) = \dots\dots\dots$  et  $f_1(\text{Antarès}) = \dots\dots\dots$

**Exemple 2.** La fonction  $f_2$  qui ajoute 1 à tout entier naturel.

Quel est l'ensemble de départ ?  $\dots\dots\dots$

Que vaut  $f_2(4)$  ?  $f_2(38)$  ?  $\dots\dots\dots$

Compléter :

$$f_2 : \dots\dots\dots \rightarrow \mathbb{N}$$

$$n \mapsto \dots\dots\dots$$

**Exemple 3.** La fonction  $f_3$  qui multiplie tout réel par 2 puis ajoute 3.

Quel est l'ensemble de départ ?  $\dots\dots\dots$

Que vaut  $f_3(2)$  ?  $f_3(5)$  ?  $\dots\dots\dots$

Compléter :

$$f_3 : \dots\dots\dots \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \dots\dots\dots$$

Quelle est la nature de la fonction  $f_3$  ?  $\dots\dots\dots$

### Définition I.2

1. Certaines fonctions ne peuvent agir sur l'ensemble de tous les réels, on appelle **ensemble de définition** le plus grand sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  sur lequel il est possible de faire agir  $f$ .
2. Soit  $f$  une fonction. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $f(a) = b$ . On dit que  $b$  est **l'image** de  $a$  par  $f$  et  $a$  est un **antécédent** de  $b$  par  $f$ .

*Remarque importante : chaque point  $a$  de l'ensemble de définition a **une seule** image  $f(a)$  mais il peut exister **plusieurs** antécédents d'un même point  $b$ .*

Quels sont les antécédents de « lune » par  $f_1$  ?  $\dots\dots\dots$

**Exemple 4.** La fonction racine carrée  $f_4 : x \mapsto \sqrt{x}$ .

Quel est l'ensemble de définition de  $f_4$  ?  $\mathcal{D}_{f_4} = \dots\dots\dots$

Quelle est l'image de 4 ? de 36 ?  $\dots\dots\dots$

Quelle est l'antécédent de 3 ?  $\dots\dots\dots$



## I.3 Représentation graphique

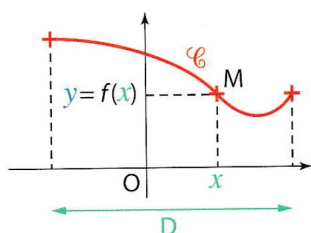
Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathcal{D}_f$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,

$$f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}.$$

### Définition I.3

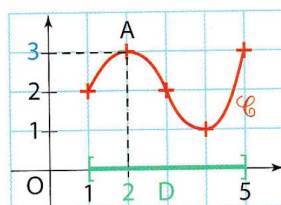
Dans un repère, la courbe représentative  $\mathcal{C}_f$  de la fonction  $f$  est l'ensemble des points de coordonnées

$$(x; f(x)) \quad \text{où} \quad x \in \mathcal{D}_f.$$



**Conséquence :** le point  $M(x; y)$  appartient à  $\mathcal{C}_f$  si et seulement si  $y = f(x)$ .

**Exemple 5.** Soit  $f_5$  une fonction définie sur l'intervalle  $\mathcal{D}_f = [1; 5]$  dont la représentation graphique est donnée par :



Quelles sont les images de 1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ?

.....

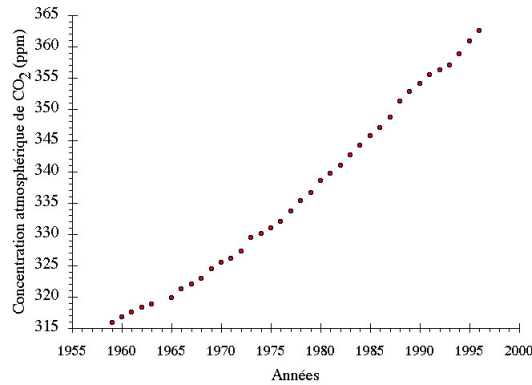
Quels sont les antécédents de 1 ? 2 ? 3 ?

.....

## II Variations d'une fonction

### II.1 Monotonie ou sens de variation

Depuis 1958, la station à Mauna Loa (Hawaï) mesure la concentration de  $CO_2$  dans l'air. Le relevé annuel est donné dans la figure suivante.



Décrire l'évolution de la concentration du  $CO_2$  au cours du temps.

### Définition II.1

Soit  $f$  une fonction définie sur  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ .

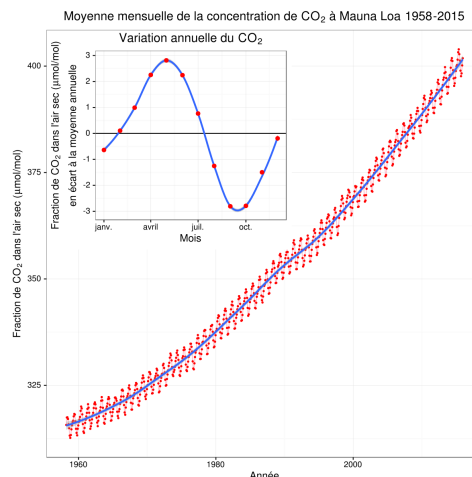
- La fonction  $f$  est dite **croissante** sur  $I$  si et seulement si pour tout réels  $u$  et  $v$  dans  $I$  vérifiant  $u \leq v$ , on a

$$f(u) \leq f(v).$$

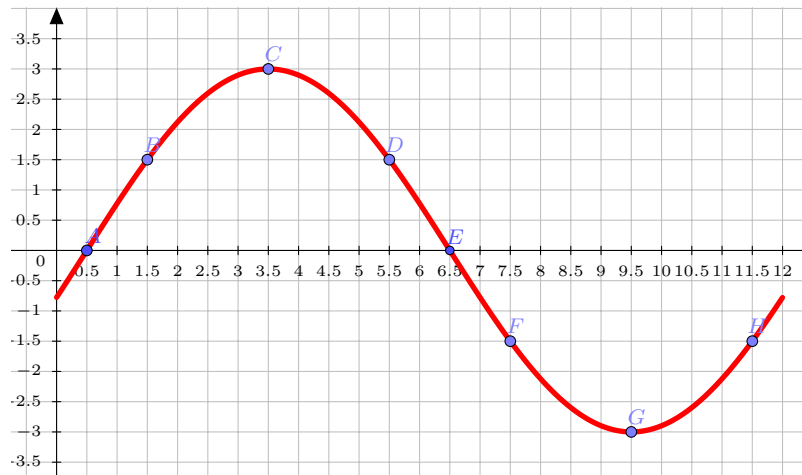
- La fonction  $f$  est dite **décroissante** sur  $I$  si et seulement si pour tout réels  $u$  et  $v$  dans  $I$  vérifiant  $u \leq v$ , on a

$$f(u) \geq f(v).$$

En regardant de plus près l'évolution de la concentration de  $CO_2$ , on s'aperçoit que durant une année la variation de la concentration du  $CO_2$  change. On donne ci dessous un relevé plus précis appelé courbe de Keeling (nom du scientifique ayant initié ces mesures).



On modélise l'évolution de l'écart de la concentration de  $CO_2$  par rapport à sa moyenne par la courbe suivante :



Les graduations en abscisse correspondent au mois de l'année : 0=01 janvier, 0.5=15 janvier, 1=01 février, 1.5=15 février, 2=01 mars, 2.5=15 mars, 3=01 avril etc. On note  $g$  la fonction donnant l'écart de concentration de  $CO_2$  à la moyenne en fonction du temps.

Aux alentours du 1<sup>er</sup> Janvier la concentration de  $CO_2$  augmente. Jusqu'à quelle date  $g$  est-elle croissante ?

.....  
Donner l'intervalle de temps pour lequel  $g$  est décroissante.

.....  
Quel est le comportement de  $g$  à la fin de l'année ?

.....  
A votre avis, quel phénomène peut expliquer une telle variation ?

.....  
.....  
.....

## II.2 Tableau de variation

### Définition II.2

Lorsqu'une fonction est monotone (croissante ou décroissante) par morceaux (sur plusieurs intervalles consécutifs) on représente dans un tableau ses variations par des flèches :

- vers le haut lorsque  $f$  est croissante,
- vers le bas lorsque  $f$  est décroissante.

Ce tableau est appelé le **tableau de variation** de  $f$ .

**Exemple 6.** On reprend la fonction  $g$  donnant les variations de la concentration de  $CO_2$  au cours de l'année. Compléter son tableau de variation :



x	0	3,5	...	12
g(x)		...		0.78
	-0,78		-3	

### II.3 Maximum et minimum

Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $I$ .

#### Définition II.3

Soit  $a \in I$  un point de  $I$ . On dit que  $f(a)$  est

- un maximum de  $f$  sur  $I$  si et seulement si pour tout réel  $x \in I$ ,

$$f(x) \leq f(a).$$

- un minimum de  $f$  sur  $I$  si et seulement si pour tout réel  $x \in I$ ,

$$f(x) \geq f(a).$$

On reprend la fonction  $g$  donnant les variations de la concentration de  $CO_2$  au cours de l'année. Quel est son maximum ? son minimum ?

.....  
En quelle valeur ce maximum est-il atteint ? Même question pour le minimum.

.....  
.....