Chapitre VI : Fonctions affines

I Définition

Définition I.1

Une fonction affine f est une fonction telle qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

Exemple 1. Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont affines ? Donner alors la valeur des coefficients a et b associés.

$$f_1(x) = 2x^2 + 1 \qquad f_2(x) = 3x - 2 \qquad f_3(x) = -5x$$

$$f_4(x) = x\,(4 - x) \qquad f_5(x) = \frac{x+1}{4x+7} \qquad f_6(x) = 12.$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Définition I.2

- Le coefficient a est appelé **le coefficient directeur**.
- Le coefficient b est **l'ordonnée à l'origine**.

Exemple 2. Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine dans chacun des cas suivants :

$$f_1(x) = 5x - 2 \qquad f_2(x) = 8 - 6x \qquad f_3(x) = 9(2x - 5)$$

$$f_4(x) = 4 + 2x - 7 - x + 3 \qquad f_5(x) = \frac{3x^2 + 7x}{5} \qquad f_6(x) = -13.$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Cas particuliers

- Si le coefficient $a = 0$ alors la fonction $f : x \mapsto b$ est **la fonction constante** égale à b.
- Si le coefficient $b = 0$ alors la fonction $f : x \mapsto ax$ passe par l'origine du repère $(0; 0)$ et est dite **linéaire**.

Exemple 3.

1. Dans l'exemple 1, trouver la fonction constante et la fonction linéaire.

   . . . .

   . . . .

2. Même question pour l'exemple 2.

   . . . .

   . . . .

II Représentation graphique

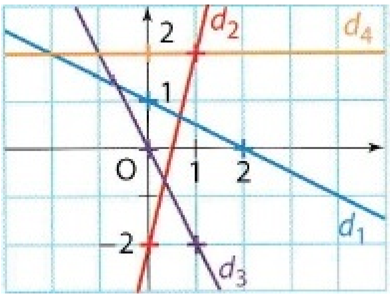
Proposition II.1

Une fonction est affine si et seulement si sa courbe représentative est **une droite** non parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple 4. On considère quatre fonctions affines

$$f_1(x) = 4x - 2 \qquad f_2(x) = -2x \qquad f_3(x) = 2 \qquad f_4(x) = -0,5x + 1$$

dont les courbes représentatives sont données en vrac dans le graphique suivant :



Relier chaque droites d_1, d_2, d_3 et d_4 à la fonction affine associée.

. . . .

. . . .

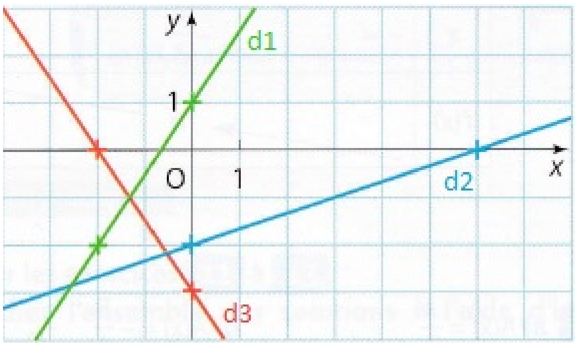
Proposition II.2

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et d sa courbe représentative.

- Le coefficient b est l'ordonnée du point d'intersection de la droite avec l'axe des ordonnée ou encore b est l'image de 0 par f.
- Le coefficient a est la pente de la droite, on le calcule de la façon suivante. Soit $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points de la droite d. On a

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemple 5. Déterminer les coefficients a et b des fonctions affines f_1, f_2 et f_3 dont les courbes représentatives sont données respectivement par d_1, d_2 et d_3 ci-dessous.



. . . .

. . . .

. . . .

III Propriétés

Proposition III.1

- Une fonction affine non constante décrit un phénomène qui augmente/diminue de façon constante.
- Soit f une fonction affine de coefficient directeur a. Pour tous réels u et v, on a

$$f(u) - f(v) = a(u - v).$$

Proposition III.2

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.

- Si $a > 0$ alors la fonction affine est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$ alors la fonction affine est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$ alors la fonction est constante.

Exemple 6. Déterminer le sens de variation des fonctions suivantes, établir leurs tableaux de signes puis les tracer.

$$f_1(x) = 3x - 3 \qquad f_2(x) = -4x \qquad f_3(x) = -3 \qquad f_4(x) = \frac{x}{2} + 2$$

....

....

....

....

....

....

....