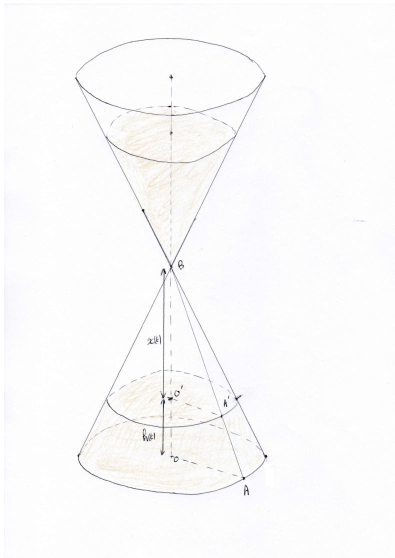
Homework 2

La présentation doit être soignée et toutes les questions doivent être justifiées. La réflexion en groupe est autorisée mais la rédaction des solutions doit être ***personnelle****. La moindre suspicion de recopiage annulera la copie du copieur et du copié.*

Exercise 1. *(7 points).*

Edifis has a limited time to build a palace for the Queen Cleopatra. But he is scatterbrained and forgets the scheduled date. The only information he has, is the Cleopatra's hourglass : this one is made of two circular cones connected together at their vertex. The sand falls from the higher cone to the lower cone and will entirely fill the lower cone when the end of the time allowed.



Edifis know that the radius of the base R is equal to 1 meter and that the height H of the hourglass is equal to 4 meters. Let $x(t)$ be the distance between the vertex of the fallen heap of sand at the time t and the middle of the hourglass and let $h(t)$ be the height of the fallen heap of sand. We denote by O the center of the circle of the base of the hourglass, by A a point of this circle, by B the common vertex of the two cones, by O' the center of the circle created by the top of the fallen heap of sand and by A' the intersection of this circle with (AB).

We define v the function which, at each time t, gives the volume $v(t)$ of the fallen sand. We suppose that the function v is affine. When Edifis came for the first time to see the hourglass, fifteen days ago, at $t = -15$, the height of the sand was

$$h(-15) = 0,5\text{m}.$$

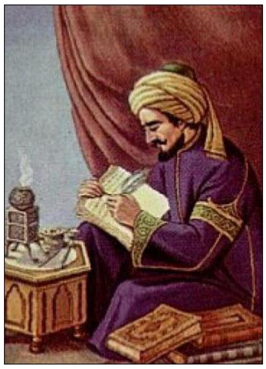
Today, the sand has a height

$$h(0) = 1\text{m}.$$

1. Let $t \geqslant 0$. Give a formula of $x(t)$ with H and $h(t)$.
2. Give, justifying carefully, a formula of $O'A'$ with R, $x(t)$ and H.
3. Prove that $v(t) = \frac{\pi R^2 H}{6} - \frac{4\pi x(t)^3 R^2}{3H^2}$.
4. Give the numerical values of $v(0)$ and $v(-15)$.
5. Deduce the slope of the function v.
6. Give the y-intercept of v et deduce its algebraic notation.
7. How many time Edifis has to finish his job ?

Ejercicio 2. *(10 puntos).* El texto más abajo está codificado y queremos descubrir el mensaje escondido. Sabíamos que el texto fue cifrado según el código de César que consistir en desplazar todas las letras del alfabeto de un mismo número. Por ejemplo, si este número es 5, la A se vuelve F, la B se vuelve G, la C se vuelve H y así sucesivamente.

Ju Trwmr nbc dw bjejwc jajkn md mrg-wndernvn brnlun zdr b'nbc rwcnanbbn j mn wxvkandbnb blrnwlnb juujwc mn uj pnxvncarn j uj vnmnlrwn nc j uj lqrvrn. Mjwb un « Vjwdblarc bda un lqrooanvnwc mnb vnbbjpnb lahycxpajyqrzdnb » ru ngyurzdn lxvvnwc ljbbna unb vnruundab lxmnb lxwwdb j bxw nyxzdn, j u'jrmn mn uj cnlqwrzdn mn u'jwjuhbn mn oanzdnwln. L'nbc uj yanvrnan cajln lxwwdn mn lahycjwjuhbn. Yja lxwbnzdnwc, ru nbc lxwbrmnan lxvvn u'dw mnb oxwmjcndab mn uj mrblryurwn.



El análisis de frecuencias es un enfoque estadístico que se apoya en el que las letras de una lengua no están uniformemente representadas. En efecto, en la lengua francesa, las frecuencias de aparición de cada letra se dan por (en porcentaje redondeado al décimo) :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Lettre	e	a	i	s	t	n	r	u	l	o	d	m	p
Fréquence	$15,87$	$9,42$	$8,41$	$7,9$	$7,26$	$7,15$	$6,46$	$6,24$	$5,34$	$5,14$	$3,39$	$3,24$	$2,86$

Rang	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
Lettre	c	v	q	g	b	f	j	h	z	x	y	k	w
Fréquence	$2,64$	$2,15$	$1,06$	$1,04$	$1,02$	$0,95$	$0,89$	$0,77$	$0,32$	$0,3$	$0,24$	0	0

1. ¿Cuál es la mediana de las frecuencias teóricas ?
2. ¿Cuál es el primer cuartil y el tercer cuartil ?

Consideramos que el texto codificado es una muestra de una población de letras verificando las frecuencias abajo.

3. Criticar el hecho de que las letras están sorteadas independientemente las unas de las otras.
4. ¿Por qué no podemos construir un intervalo de fluctuación alrededor de los valores teóricos dados en el cuadro más adelante ?

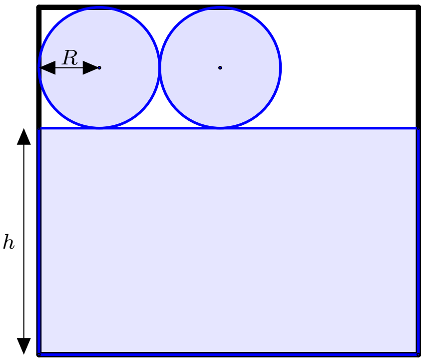
Asumimos que podemos construir un intervalo de fluctuación cuando las condiciones siguientes están cumplidas :

$$n \geqslant 30 \qquad \text{y} \qquad np > 5 \qquad \text{y} \qquad n(1-p) > 5.$$

5. ¿Para qué letras podemos construir un intervalo de fluctuación ?
6. ¿Para cada una de estas letras, construir el intervalo de fluctuación al 95% ?
7. ¿Cual es la letra por la que la frecuencia de aparición en el texto es la más grande ? ¿En cual(es) intervalo(s) la frecuencia de esta letra puede pertenecer ?
8. Misma pregunta para el segunda letra la más común.
9. Con la ayuda de la pregunta 7, determinar el desfase que ha permitido codificar el texto.
10. Descifrar el mensaje.

Exercise 3. *(7 points)*.

A factory of tin can wants to optimise its production. The boxes are cylinders with height h and whose the radius of the disk of the base is denoted by R. They are built with metal plate into which are cut the opposite net.
The cost of the raw material is given by the area a of the rectangular plate, bought by the factory. We fix $a = 603$ cm^2. The aim of the factory is to find the better length L and width l in order to obtain the bigger boxes, with a maximum volume.



1. Give a formula of l and L with h and R and deduce a formula of a with h and R.
2. Prove that
$$h = \frac{a}{2\pi R} - 2R.$$
3. Deduce that the volume of the cylinder, made with the above net, is
$$\mathscr{V} = \frac{Ra}{2} - 2\pi R^3.$$
4. We consider $\mathscr{V}$ as a function of the radius R : $\mathscr{V}(R) = 301,5R - 2\pi R^3$ and we assume that this function has a unique maximum when $\mathscr{V}$ is non-negative. More precisely, the variation tabular of $\mathscr{V}$ is given by :

R	0	R_{max}	$\sqrt{\frac{a}{4\pi}}$
$\mathscr{V}$	0 $\nearrow$	V_{max}	$\searrow$ 0

where R_{max} is the radius for which the volume V_{max} is maximum. We want to approach V_{max} applying the following algorithm.

We start with a radius R equals to 0. This radius increases step by step. At each time, we add to R a small quantity P (for example $P = 0.1$) and we verify if the volume $\mathscr{V}(R+p)$ is bigger or lower than the previous volume $\mathscr{V}(R)$. If the new volume is bigger, our research progresses and we increase R again. Else, we just exceed the maximum. We then stop the algorithm and return the last value of R and of the associated volume. Following this idea, complete the opposite algorithm.

- $R \leftarrow 0$
- Ask P
- $A \leftarrow 301,5 * R - 2 * \pi * R^3$
- $B \leftarrow 301,5 * (R + P) - 2 * \pi * (R + P)^3$
- While $A \ldots\ldots B$
- $\quad \ldots\ldots \leftarrow R + P$
- $\quad A \leftarrow B$
- $\quad B \leftarrow 301,5 * (R + P) - 2 * \pi * (R + P)^3$
- endofwhile
- Return R et A.

5. Construct the algorithm on the calculator and apply it with a step $P = 0.1$. Deduce the value of R_{Max}.
6. With the help of the question 2, deduce h.