# Correction du contrôle 3

**Solution de l'exercice 1**. Pour cette première expression, on utilise pour les deux termes la simple distributivité :

$$\begin{aligned}A_1 &= x(5-x) - 10\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{4}\right)\\ &= 5\times x - x\times x - 10\times\frac{x}{2} - 10\times\left(-\frac{3}{4}\right)\\ &= 5x - x^2 - 5\times 2\times\frac{x}{2} + 5\times 2\times\frac{3}{4}\\ &= 5x - x^2 - 5x + \frac{5\times 3}{2}\\ &= -x^2 + \frac{15}{2}.\end{aligned}$$

Pour la deuxième expression, on utilise de la double distributivité pour les deux termes :

$$\begin{aligned}A_2 &= (x+2)(x-6) - (3-x)(2-4x)\\ &= x^2 - 6x + 2x - 12 - \left(6 - 12x - 2x + 4x^2\right)\\ &= x^2 - 6x + 2x - 12 - 6 + 12x + 2x - 4x^2\\ &= -3x^2 + 10x - 18.\end{aligned}$$

Pour la troisième expression une méthode acceptable est de développer par une double distributivité. Mais la bonne méthode est de repérer l'identité remarquable $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$. D'où,

$$A_3 = (x+4)(x-4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16.$$

Enfin pour la quatrième expression on utilise les identités remarquables pour développer les carrés :

$$\begin{aligned}A_4 &= (x+3)^2 - 2(x-5)^2\\ &= x^2 + 2\times 3\times x + 3^2 - 2\left(x^2 - 2\times 5\times x + 5^2\right)\\ &= x^2 + 6x + 9 - 2\left(x^2 - 10x + 25\right)\\ &= x^2 + 6x + 9 - 2x^2 + 20x - 50\\ &= -x^2 + 26x - 41.\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice 2**. Pour la première expression, on repère le facteur commun $(x-7)$ :

$$\begin{aligned}B_1 &= (x-7)(3x+2) - (2x+5)(x-7)\\ &= (x-7)(3x+2-(2x+5))\\ &= (x-7)(3x+2-2x-5)\\ &= (x-7)(x-3).\end{aligned}$$

Pour la deuxième expression, on reconnaît l'identité remarquable $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$. En identifiant, on veut $a^2 = 4x^2 = 2^2x^2 = (2x)^2$ et $b^2 = 16 = 4^2$. On prend donc $a = 2x$ et $b = 4$ et on vérifie que $2ab = 2 \times 2x \times 4 = 16x$. D'où,

$$B_2 = 4x^2 - 16x + 16 = (2x - 4)^2.$$

Pour la troisième expression, puisque 45 n'est pas un carré, on ne peut pas appliquer l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Par contre, on repère que 5 est facteur commun aux deux termes, on commence donc par factoriser par 5 :

$$B_3 = 5x^2 - 45 = 5x^2 - 5 \times 9 = 5\left(x^2 - 9\right).$$

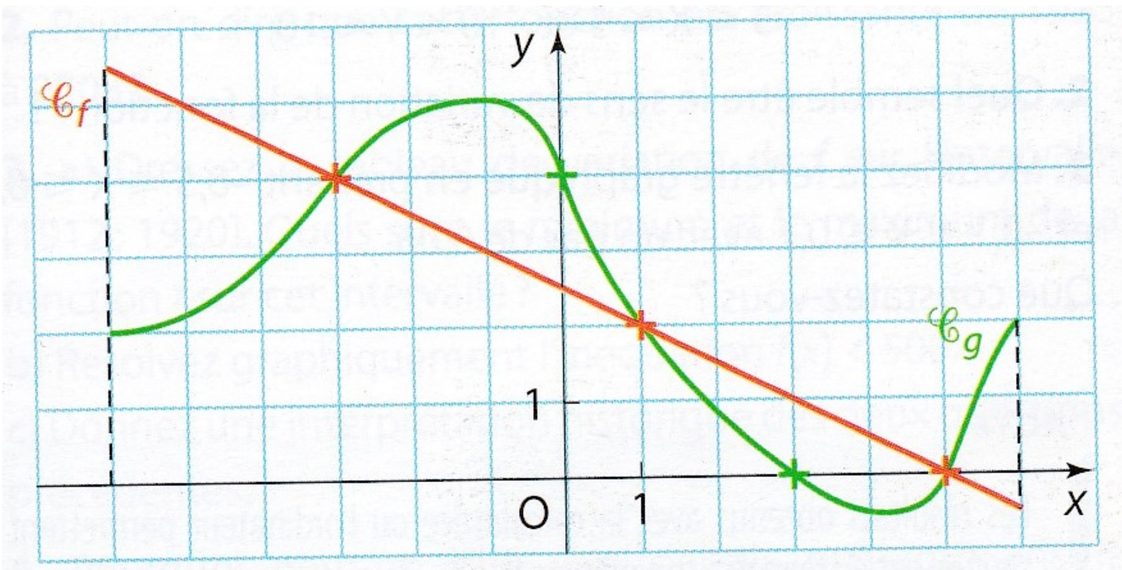
Cette fois-ci, 9 est un carré, on peut donc appliquer l'identité remarquable pour terminer la factorisation :

$$B_3 = 5\left(x^2 - 3^2\right) = 5(x - 3)(x + 3).$$

Dans le quatrième terme, on reconnaît l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. D'où,

$$B_4 = 36x^2 - 25 = 6^2x^2 - 5^2 = (6x)^2 - 5^2 = (6x - 5)(6x + 5).$$

**Solution de l'exercice 3.**




1. Le réel $x$ est solution de l'équation $f(x) = g(x)$ si et seulement si $x = -3$ ou $x = 1$ ou $x = 5$.
2. Le réel $x$ est solution de l'équation $g(x) = 4$ si et seulement si $x = -3$ ou $x = 0$.
3. L'ensemble solution de l'inéquation $g(x) > 0$ est $[-6; 3[\cup]5; 6]$.
4. L'ensemble solution de l'inéquation $g(x) > f(x)$ est $]-3; 1[\cup]5; 6]$.
5. L'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leqslant g(x)$ est $[-3; 1] \cup [5; 6]$.
6. D'après la question précédente, on sait que $f(x) - g(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow x \in [-3; 1] \cup [5; 6]$. Donc $f(x) - g(x)$ est négatif sur $[-3; 1] \cup [5; 6]$ et positif ailleurs :

| $x$ | $-6$ | | $-3$ | | $1$ | | $5$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - g(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Exercice 4**. *(6 points).* Un particulier déménage et souhaite louer un camion. Deux formules lui sont proposées.

- Formule 1 : 460 € au départ puis $3,5$ € par kilomètre.
- Formule 2 : 1000 € au départ puis 2 € par kilomètre.

On note $x$ le nombre de kilomètres parcourus, $f_1(x)$ le prix associé dans la formule 1 et $f_2(x)$ celui de la formule 2.

1. *(2 points)*Exprimer $f_1(x)$ et $f_2(x)$ en fonction de $x$.
2. Résoudre l'équation $f_1(x) = f_2(x)$.
3. A quoi correspond concrètement pour notre particulier la résolution de l'inéquation $f_1(x) < f_2(x)$.
4. Résoudre cette inéquation $f_1(x) < f_2(x)$.
5. Le particulier doit parcourir 340 kilomètres. Quelle est la formule la plus avantageuse dans ce cas ? Justifier.

**Solution de l'exercice 4**.

1. Le prix $f_1(x)$ de la formule 1 est donné par
$$f_1(x) = 460 + 3,5x.$$
Tandis que le prix de la formule 2 est donné par
$$f_2(x) = 1000 + 2x.$$
2. Soit $x$ un réel,
$$\begin{aligned} f_1(x) = f_2(x) &\Leftrightarrow 460 + 3,5x = 1000 + 2x \\ &\Leftrightarrow 460 + 3,5x - 460 = 1000 + 2x - 460 \\ &\Leftrightarrow 3,5x = 540 + 2x \\ &\Leftrightarrow 3,5x - 2x = 540 \\ &\Leftrightarrow 1,5x = 540 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{540}{1,5} = \frac{5400}{15} = \frac{1080}{3} = 360. \end{aligned}$$
3. L'inéquation $f_1(x) < f_2(x)$ correspond au fait que le prix de la formule 1 est plus bas et donc plus avantageux que le prix de la formule 2.
4. On reprend les calculs précédents :
$$\begin{aligned} f_1(x) < f_2(x) &\Leftrightarrow 460 + 3,5x < 1000 + 2x \\ &\Leftrightarrow 460 + 3,5x - 460 < 1000 + 2x - 460 \\ &\Leftrightarrow 3,5x < 540 + 2x \\ &\Leftrightarrow 3,5x - 2x < 540 \\ &\Leftrightarrow 1,5x < 540. \end{aligned}$$
Pour conclure, on divise par $1,5$. Notez que puisque $1,5$ est positif, on ne change pas le signe de l'inégalité :
$$f_1(x) < f_2(x) \Leftrightarrow x < \frac{540}{1,5} = 360.$$
5. Le particulier parcourt $x = 340$ kilomètres. On sait que $x = 340 < 360$. Donc d'après la question précédente, on a $f_1(340) < f_2(340)$ c'est-à-dire que pour 340 kilomètres, la formule 1 est plus avantageuse que la formule 2 dans ce cas.