



Correction du contrôle 6

Vecteurs

Tableaux de signe

Solution de l'exercice 1.

1. Par lecture graphique on obtient $\vec{u}(3;1)$, $A(3;1)$ et $D(10;6)$.
2. D'après la formule du cours, les coordonnées du vecteur \vec{CD} sont

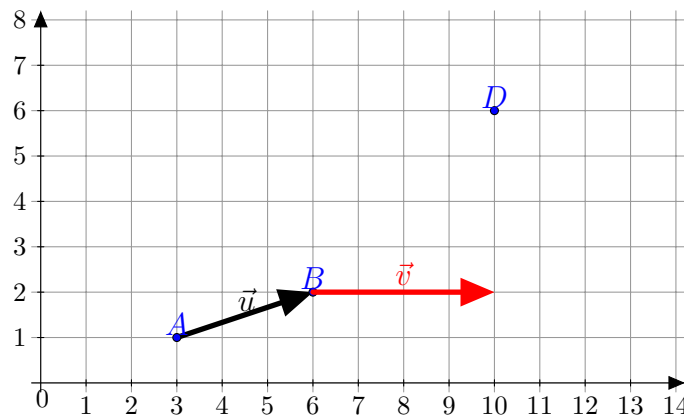
$$(x_D - x_C; y_D - y_C) = (10 - 12; 6 - 4) = (-2; 2).$$

De même les coordonnées du vecteur \vec{AC} sont

$$(x_C - x_A; y_C - y_A) = (12 - 3; 4 - 1) = (9; 3).$$

3. Par définition $\vec{v} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{CD} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{CD}$. Or le vecteur \vec{u} a pour coordonnées $(3;1)$ et le vecteur \vec{CD} a pour coordonnées $(-2;2)$. Donc les coordonnées de \vec{v} sont égales à

$$\begin{aligned} (3;1) - \frac{1}{2}(-2;2) &= (3;1) - \left(\frac{-2}{2}; \frac{2}{2}\right) \\ &= (3;1) - (-1;1) = (3 - (-1); 1 - 1) = (3 + 1; 0) = (4;0). \end{aligned}$$



4. On a $\vec{u}(3;1)$ et $\vec{AC}(9;3) = 3(3;1)$. Donc on remarque que $\vec{AC} = 3\vec{u}$. Donc par définition, \vec{u} et \vec{AC} sont colinéaires.
5. D'après la question précédente, les vecteurs $\vec{u} = \vec{AB}$ et \vec{AC} sont colinéaires. Donc par une propriété du cours, on déduit que les points A , B et C sont alignés.

Solution de l'exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 5x + 3 \geq 0 &\Leftrightarrow 5x \geq -3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{-3}{5}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $\left[-\frac{3}{5}; +\infty\right[$.



2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 3x - 9 \geq 0 &\Leftrightarrow 3x \geq 9 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{9}{3} = 3. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $[3; +\infty[$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} 3x + 8 \leq -4x + 3 &\Leftrightarrow 3x + 4x \leq 3 - 8 \\ &\Leftrightarrow 7x \leq -5 \\ &\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Donc l'ensemble solution est $]-\infty; -\frac{5}{7}]$.

4. D'après la question 1, $5x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{3}{5}$ et d'après la question 2, $3x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{5}$	3	$+\infty$	
$5x + 3$	-	0	+	+	
$3x - 9$	-	-	0	+	
$(5x + 3)(3x - 9)$	+	0	-	0	+

L'ensemble solution de l'équation $(5x + 3)(3x - 9) \geq 0$ est donc $]-\infty; -\frac{3}{5}] \cup [3; +\infty[$.

5. D'après la question 2, $3x - 9 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ et de même que dans la question 3,

$$\begin{aligned} 7x + 5 \geq 0 &\Leftrightarrow 7x \geq -5 \\ &\Leftrightarrow x \geq -\frac{5}{7}. \end{aligned}$$

On en déduit donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{5}{7}$	3	$+\infty$	
$3x - 9$	-	-	0	+	
$7x + 5$	-	0	+	+	
$(3x - 9)(7x + 5)$	+	0	-	0	+

L'ensemble solution de l'équation $(3x - 9)(7x + 5) \leq 0$ est donc $[-\frac{5}{7}; 3]$.

**Solution de l'exercice 3.**

1. Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, I est le milieu de $[AC]$, donc les droites (AI) et (IC) sont confondues. Donc les vecteurs \vec{AI} et \vec{IC} ont la même direction. De plus A, I, C sont alignés dans cet ordre donc les \vec{AI} et \vec{IC} ont le même sens. Enfin puisque $AI = IC$, les vecteurs ont la même norme. Finalement, les vecteurs \vec{AI} et \vec{IC} sont égaux.
2. D'après la relation de Chasles : $\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC}$.
3. Or d'après la question 1, $\vec{IC} = \vec{AI}$. Donc

$$\vec{AC} = \vec{AI} + \vec{IC} = \vec{AI} + \vec{AI} = 2\vec{AI}.$$

4. D'après la relation Chasles, $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$.
5. De la même façon que dans la question 1, puisque I est le milieu de $[BD]$, les vecteurs \vec{BI} et \vec{ID} sont égaux. Donc $\vec{ID} = \vec{BI} = -\vec{IB}$.
6. D'après la question 4, $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$. Donc en utilisant la question 5, on a $\vec{AD} = \vec{AI} - \vec{IB}$.
7. D'après la question 4 et 6, $\vec{AB} = \vec{AI} + \vec{IB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} - \vec{IB}$. Donc

$$\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} - \vec{IB} = 2\vec{AI}.$$

8. D'après la question 3, $\vec{AC} = 2\vec{AI}$. Donc finalement,

$$\vec{AB} + \vec{AD} = 2\vec{AI} = \vec{AC}.$$

9. D'après la formule du cours, les coordonnées de \vec{AI} sont

$$(x_I - x_A; y_I - y_A) = (6 - 2; 4 - 5) = (4; -1).$$

De même les coordonnées de \vec{IC} sont

$$(x_C - x_I; y_C - y_I) = (x - 6; y - 4).$$

10. Or d'après la question 1, $\vec{AI} = \vec{IC}$. Donc $(4; -1) = (x - 6; y - 4)$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} 4 = x - 6 \\ -1 = y - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 6 = x \\ -1 + 4 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc les coordonnées du point C sont $(10; 3)$.

11. Dans la question 8, on retrouve la règle du parallélogramme : si $ABCD$ est un parallélogramme alors $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$.