Colle du 11/10
Révisions sur les probabilités

Sujet 1

Question de cours.

1. Valeur et calcul de l'espérance et de la variance de $\mathscr{B}(n,p)$.
2. Ecrire un programme qui permette de tracer l'histogramme de $\mathscr{B}(n,p)$ à l'aide d'une somme de variables aléatoires de Bernoulli.

Exercice 1. Un exploitant agricole possède 100 vaches qui se répartissent au hasard dans deux étables qui contiennent chacune n places. Si une vache pénètre dans une étable pleine, alors celle-ci ne parvient pas à trouver de place et l'exploitant est obligé d'intervenir pour régler le problème. On souhaite trouver la valeur minimale de n permettant à chaque vache de trouver une place avec une probabilité strictement supérieure à 95%.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de vaches ayant choisi l'étable 1.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Combien de vaches auront choisi l'étable 2 ?
3. Exprimer en fonction de X et n la probabilité que chaque vache trouve une place.
4. Ecrire un programme qui renvoie 1 si toutes les vaches ont trouvé une place et 0 sinon.
5. Ecrire un programme qui simule un grand nombre de fois la rentrée des vaches et retourne p la proportion de fois où tout s'est passé sans incident.
6. Ecrire un programme qui retourne la valeur minimale de n pour laquelle la $p > 0,95$.
7. Montrer que la probabilité que chaque vache trouve une place est égale à $\mathbb{P}\left(|X-50| \leqslant n-50\right)$.
8. En déduire une majoration de $\mathbb{P}\left(|X-50| \leqslant n-50\right)$.
9. Trouver un entier n tel que $\mathbb{P}\left(|X-50| \leqslant n-50\right) \leqslant 0,95$. Comparer à la valeur informatique de la question 6.

Sujet 2

Question de cours. Déterminer la loi de deux variables aléatoires indépendantes uniformément distribuées sur $\{1,\dots,n\}$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On extrait successivement et sans remise les n jetons d'une urne que l'on suppose numérotés de 1 à n. Pour $k \in [\![2;n]\!]$, on dit que le résultat du k-ième tirage est un record si le numéro du jeton obtenu lors de ce tirage est strictement supérieur aux numéros précédemment tirés. Par ailleurs, on convient de dire que le premier tirage est toujours un record.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un seul record ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir n records ?
3. A l'aide de la commande `random.choice()`, construire un programme qui retourne le nombre de records obtenus.
4. En déduire un programme qui retourne l'histogramme de la loi du nombre de records.
5. On suppose dans cette question que l'on tire m jetons toujours successivement et sans remise. Quelle est alors la probabilité d'obtenir un seul record ? On laissera le résultat sous forme d'une somme.

Sujet 3

Question de cours.

1. Valeur et calcul de l'espérance et de la variance de $\mathscr{U}(\{0,\ldots,n\})$.
2. Ecrire un programme qui permette de tracer l'histogramme de $\mathscr{U}(\{0,\ldots,n\})$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On lance de façon indépendante n fois une pièce équilibrée. On note Z la variable aléatoire qui vaut 0 si l'on obtient aucun pile pendant ces n lancers et qui, le cas contraire prend la valeur du rang du premier pile.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Pour tout $k \in Z(\Omega)$, calculer $\mathbb{P}(Z = k)$.
3. Vérifier que $\sum_{k \in Z(\Omega)} \mathbb{P}(Z = k) = 1$.

On dispose désormais de n urnes $U_1, \ldots, U_n$ telles que pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, l'urne U_k contient k boules blanches et $n-k$ boules noires.
Si après les n lancers de la pièce, la variable Z prend la valeur k, avec $k \geqslant 1$, alors on tire une par une et avec remise k boules dans l'urne U_k et on note X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues à l'issue de ces k tirages. Si la variable Z a pris la valeur 0, aucun tirage n'est effectué et X prend la valeur 0.

4. Déterminer $X(\Omega)$.
5. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_{(Z=0)}(X = i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
6. Calculer la probabilité $\mathbb{P}_{(Z=n)}(X = i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
7. Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, calculer la probabilité $\mathbb{P}_{(Z=k)}(X = i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$.
8. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{n-k}{2n}\right)^k + \frac{1}{2^n}$.
9. Montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{2^n}$.