Chapitre X : Les Matrices

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Généralités

I.1 Définition

Définition I.1

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, on appelle **matrice** toute famille de $n \times p$ éléments de $\mathbb{K}$: $(a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}}$ que l'on ordonne sous forme de tableau de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p-1} & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p-1} & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p-1} & a_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,j} & \dots & a_{n-1,p-1} & a_{n-1,p} \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p-1} & a_{n,p} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de taille $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1 :

- La place des coefficients dans le tableau a son importance. Si vous échanger la place de deux coefficients vous définissez une nouvelle matrice. Par exemple si $n = p = 2$ on a $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- De façon générale, si $A = (a_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;p]\!]}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors

$$A = B \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ a_{i,j} = b_{i,j}.$$

Définition I.2

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, $a_{i,j} = 0$, alors la matrice A est appelée **la matrice nulle** notée $0_{n,p}$ ou 0.
- Si $n = 1$, on dit que A est **une matrice ligne** ou encore **un vecteur ligne**.
- Si $p = 1$, on dit que A est **une matrice colonne** ou encore **un vecteur colonne**.
- On appelle ligne j ou $j^{\text{ième}}$ ligne de A le vecteur ligne $\begin{pmatrix} a_{i,1} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$.
- On appelle colonne j ou $j^{\text{ième}}$ colonne de A le vecteur colonne $\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$.

Définition I.3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- On définit l'addition $+$ entre deux matrices par

$$A + B = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} + (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

i.e.

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

- On définit la multiplication d'une matrice par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ par

$$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda = \lambda \cdot (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} = (\lambda\, a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}.$$

i.e.

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \dots & \lambda\, a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \dots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

- $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/3 & 1 & 1+i \\ i & 2-i & 0 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 & 1/3 & 0 & i \\ 0 & -1 & 3 & \sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1+2i \\ i & 2-2i & 3 & 8+\sqrt{2} \end{pmatrix}$
- $-5 \begin{pmatrix} -1 & 6 & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 0 \\ -5\sqrt{3} & 10 & -5 \\ -15 & -5 & 5/3 \end{pmatrix}$

Remarques 3 :

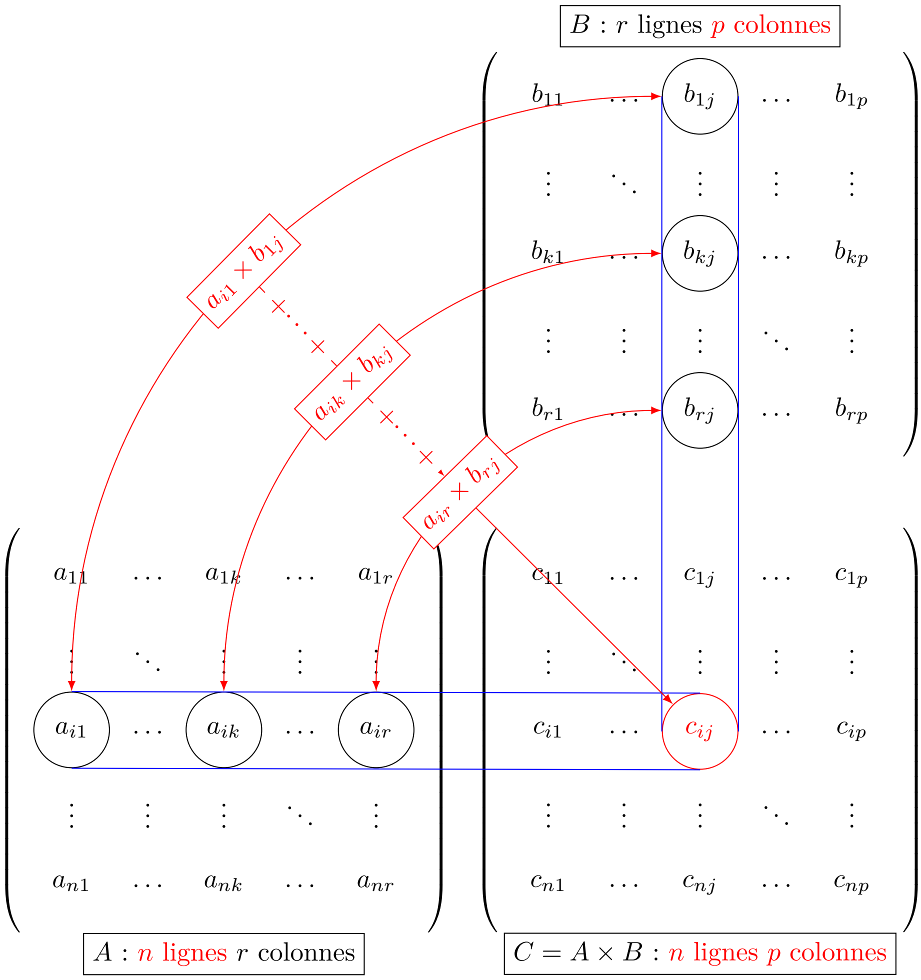
- Attention ! On ne peut additionner ensemble que deux matrices de même taille.
- L'addition est commutative pour A et B deux matrices de même taille : $A + B = B + A$.
- L'addition est associative pour A, B et C trois matrices de même taille $(A + B) + C = A\,(B + C)$ et l'on peut se passer des parenthèses et écrire $A + B + C$.
- La multiplication externe est distributive pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\lambda\,(A + B) = \lambda\, A + \lambda\, B$.
- Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $kA = \underbrace{A + \cdots + A}_{k \text{ fois}}$.
- Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A + 0_{n,p} = A$ et $\lambda\, 0_{n,p} = 0_{n,p}$.

Définition I.4

Soient $(n, r, p) \in (\mathbb{N}^*)^3$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant r}} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. On définit **le produit matriciel** AB comme étant la matrice $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!] \times [\![1; p]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{r} a_{i,k} b_{kj}.$$

Remarque 4 : On ne peut multiplier AB que si $r =$ le nombre de colonnes de $A =$ le nombre de lignes de B. On obtient alors une matrice $C = AB$ avec un nombre de lignes $= n =$ nombre de lignes de A et avec un nombre de colonnes $= p =$ nombre de colonnes de B. Notamment, avec les notations de la définition, si $n \neq p$, on ne peut pas définir BA.



Exemple 5 : Retrouver les calculs suivants :

1. $\begin{pmatrix} 1+i & -1 & 1 \\ 0 & 2i & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -i \\ 2-i & 0 \\ 3 & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-i & 1+2i \\ 11+4i & 9i \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} =$

Application : écriture matriciel d'un système

Si $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne, alors le produit AX est donné par

$$AX = x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix} + \dots + x_p \begin{pmatrix} a_{1,p} \\ \vdots \\ a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,p}x_p \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,p}x_p \end{pmatrix}.$$

Ainsi le système d'équations d'inconnues $x_1, \dots, x_p$ avec $(a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ et $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ fixés :

$$(S) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \dots a_{1,p}x_p = b_1 \\ \dots \\ a_{n,1}x_1 + \dots a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

s'écrit

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad AX = B, \qquad \text{où} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Exemple 6 : Le système (S) : $\begin{cases} 3x - 8y = \sqrt{2} \\ 7x + \pi y = 0 \end{cases}$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 7 & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Proposition I.5

Soient n, r et p trois entiers naturels non nuls.

- Le produit matriciel est bilinéaire :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K}),\ \forall B_1, B_2 \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad A(\lambda B_1 + \mu B_2) = \lambda AB_1 + \mu AB_2.$$

  De même,

$$\forall A_1, A_2 \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K}),\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad (\lambda A_1 + \mu A_2) B = \lambda A_1 B + \mu A_2 B.$$

- Le produit matriciel est associatif :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{r,q}(\mathbb{K}),\ \forall C \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K}), \quad (AB)C = A(BC) = ABC.$$

- L'élément 0 est absorbant :

$$\forall A \in \mathscr{M}_{n,r}(\mathbb{K}),\ \forall B \in \mathscr{M}_{r,p}(\mathbb{K}), \quad A0_{r,p} = 0_{n,p} = 0_{n,r}B.$$

Attention, on rappelle que si AB existe, alors BA n'est pas forcément défini et même si c'est le cas, nous avons en général $AB \neq BA$.

I.2 L'anneau des matrices carrées

Définition I.6

Si $n = p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices dites carrées c'est-à-dire pour lesquelles le nombre de lignes coïncide avec le nombre de colonnes.

Définition I.7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice identité**, notée I_n, la matrice définie par $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où δ et le symbole de Kronecker :

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Autrement dit :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition I.8

- L'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est stable addition, multiplication externe (par un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$) et multiplication interne (de deux matrices). Pour tout $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $A+B, \lambda A$ et $AB \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- La matrice I_n est l'élément neutre pour la multiplication :
$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad AI_n = I_nA = A.$$
- Le produit n'est pas commutatif. Dans l'ensemble $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ il est toujours possible de définir AB et BA pour tout $(A,b) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Cependant en général $AB \neq BA$!!
- L'ensemble des matrices $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre. La phrase suivante est FAUSSE :
$$\forall (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad AB = 0_n \quad \Rightarrow \quad A = 0_n \text{ ou } B = 0_n,$$
autrement dit l'assertion suivante est vraie :
$$\exists (A,B) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \setminus \{0_n\})^2, \text{ tel que } AB = 0_n,$$
ou encore le produit de deux matrices peut être nul sans qu'aucune des deux matrices ne soit nulle.

Remarque 7 : Du fait des bonnes propriétés de $+$ et $\times$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau. De même que dans $\mathbb{Z}$ (qui est aussi un anneau mais commutatif et intègre lui), on ne parle pas de division dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, c'est ce qui différencie un anneau d'un corps (comme $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ou $\mathbb{C}$).

Exemple 8 : Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $AB = 0_2$ pourtant $A \neq 0_2$ et $B \neq 0_2$. De plus $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $AB \neq BA$.

Remarque 9 :

- Le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ne soit pas commutatif implique que certains calculs vrais dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ne le sont plus dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple les identités remarquables sont fausses en général :
$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2.$$
On ne peut qu'écrire
$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2.$$
- Le fait que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en soit pas intègre implique que certaines simplification dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ne sont plus vraies dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Par exemple, $AB = AC \quad \Leftrightarrow \quad A(B-C) = 0_n$ n'implique pas que $B = C$ même si $A \neq 0_n$.

Définition I.9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **une matrice diagonale** si $\forall i \neq j$, on a $a_{i,j} = 0$. Ainsi,
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(a_{1,1}, \dots, a_{n,n}).$$
L'ensemble des matrices diagonales à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 10 : La matrice $I_n \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})$. La matrice $A = \operatorname{diag}(3, -3i, 0, \sqrt{5})$ est la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix}$

Proposition I.10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition et multiplication externe et multiplication interne : $\forall (A, B) \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda A \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \qquad A + B \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}), \qquad AB \in \mathscr{D}_n(\mathbb{K}).$$

De plus si $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, alors

$$\begin{aligned} \lambda A &= \operatorname{diag}(\lambda \lambda_1, \dots, \lambda \lambda_n) \\ A + B &= \operatorname{diag}(\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_n + \mu_1) \\ AB &= \operatorname{diag}(\lambda_1 \mu_1, \dots, \lambda_n \mu_1). \end{aligned}$$

En particulier, deux matrices **diagonales** commutent : $AB = BA$.

Définition I.11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **une matrice triangulaire supérieure** si $\forall i > j$, on a $a_{i,j} = 0$. Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

L'ensemble des matrices triangulaires supérieures à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 11 :

- On peut définir de même les matrices triangulaires inférieures.
- On a $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) \subseteq \mathscr{T}_n(\mathbb{K})$.

Proposition I.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{T}_n(\mathbb{K})$ est stable par addition et multiplication externe et multiplication interne : $\forall (A, B) \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K})^2$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\lambda A \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K}), \qquad A + B \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K}), \qquad AB \in \mathscr{T}_n(\mathbb{K}).$$

Remarque 12 : Attention le calcul du produit de deux matrices triangulaires est plus compliqué que celui de deux matrices diagonales et ne commute pas nécessairement. Tout ce que l'on peut affirmer dans le résultat concerne la diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu_1 & * & \dots & a_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mu_1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \mu_1 \end{pmatrix}$$

II Calcul matriciel

II.1 Puissance d'une matrice

Définition II.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $k \in \mathbb{K}$ **la puissance** $k^{\text{ième}}$ de A par récurrence :

$$\begin{aligned} A^0 &= I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} &= AA^k. \end{aligned}$$

Remarque 13 :

- On ne peut définir la puissance $k^{\text{ième}}$ des matrices carrées uniquement. Pourquoi ?
- Pour tout $(k, l) \in \mathbb{N}$, on a $A^k A^l = A^l A^k = A^{k+l}$.
- Cependant en général pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $(AB)^2 \neq A^2B^2$. On peut seulement affirmer que $(AB)^2 = ABAB$.

Exemple 14 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer A^k.

Proposition II.2

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que A et B **COMMUTENT**, i.e. $AB = BA$. Alors

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N}, \quad (A+B)^m &= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k} \\ \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad A^m - B^m &= (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right) \\ &= (A-B) \sum_{k=0}^{m-1} A^{m-1-k} B^k \end{aligned}$$

Application 15 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 2 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer A^n et B^n.

II.2 Matrices inversibles

Définition II.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est inversible si et seulement s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = I_n \qquad \text{et} \qquad BA = I_n.$$

Alors la matrice B est unique et est notée $B = A^{-1}$.

Démonstration. Démontrons l'unicité. Soient A, B_1 et B_2 trois matrices telles que $AB_1 = B_1A = AB_2 = B_2A = I_n$. Alors en multipliant $AB_1 = AB_2$ par B_1 par exemple, on obtient que

$$\underbrace{B_1A}_{=I_n}B_1 = \underbrace{B_1A}_{=I_n}B_2 \quad \Rightarrow \quad I_nB_1 = I_nB_2 \quad \Rightarrow \quad B_1 = B_2.$$

□

Théorème II.4 (admis)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est inversible.
2. Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$.
3. Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$.

De plus dans chacun des cas, $B = A^{-1}$.

Proposition II.5

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont inversibles alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que la matrice $C = B^{-1}A^{-1}$ multipliée (à gauche ou à droite indifféremment d'après le théorème précédent) par AB donne bien I_n :

$$AB \times C = A\underbrace{BB^{-1}}_{=I_n}A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

□

Définition II.6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est appelé le **groupe linéaire d'ordre n des matrices inversibles**.

Proposition II.7

L'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ muni de la multiplication matricielle est un groupe :

- $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$,
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors A^{-1} existe et est un élément de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Proposition II.8

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, $A^r \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ de plus $(A^r)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^r$ et cette matrice est notée A^{-r}.

II.3 La transposée

Définition II.9

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant 1\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie pour tout $(i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!]$ par

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

La matrice B est alors notée ${}^tA$ ou encore A^T.

On obtient ${}^tA$ en permutant les lignes et les colonnes : les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A et les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A.

Exemple 16 :

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 & \pi \\ 0 & 9 & 7 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 9 \\ -4 & 7 \\ \pi & -6 \end{pmatrix} \qquad {}^t\begin{pmatrix} 1 & \alpha & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -37 \\ -3 & \alpha^2 & 8 & -10 \\ 6 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha^2 & 0 \\ -4 & 0 & 8 & 1 \\ 3 & -37 & -10 & -4 \end{pmatrix}$$

Proposition II.10

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$.
2. ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$.

Démonstration. Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On pose ${}^tA = \left(a'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$ et ${}^tB = \left(b'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Notez que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$,

$$a'_{i,j} = a_{j,i} \qquad \text{et} \qquad b'_{i,j} = b_{j,i}.$$

1. Posons $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}} = {}^t(A+B)$. Puisque

$$A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant n}}.$$

On en déduit que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$,

$$c_{i,j} = a_{j,i} + b_{j,i} = a'_{i,j} + b'_{i,j}$$

Par conséquent, on a bien ${}^t(A+B) = C = {}^tA + {}^tB$.

2. Posons $C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = {}^t(\lambda A)$. Puisque $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1;p]\!]$ et tout $j \in [\![1;n]\!]$,

$$c_{i,j} = \lambda a_{j,i} = \lambda a'_{i,j}.$$

Ainsi ${}^t(\lambda A) = C = \lambda\, {}^tA$.

□

Proposition II.11

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. On a

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

Démonstration. Soient

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \qquad {}^tA = \left(a'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \qquad {}^tB = \left(b'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$$

$$C = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = AB \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad {}^tC = \left(c'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

$$D = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} = {}^tB\,{}^tA \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

Par définition du produit,

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=0}^{m} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Donc en appliquant la transposée, on obtient que

$$\begin{aligned}\forall (i,j) \in [\![1;p]\!] \times [\![1;n]\!], \quad c'_{i,j} = c_{j,i} &= \sum_{k=0}^{m} a_{j,k} b_{k,i} \\ &= \sum_{k=0}^{m} a'_{k,j} b'_{i,k} \\ &= \sum_{k=0}^{m} b'_{i,k} a'_{k,j} \\ &= d_{i,j}\end{aligned}$$

On en déduit donc que ${}^tC = D$ autrement dit :

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA.$$

□

Définition II.12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **symétrique** si ${}^tA = A$ c'est-à-dire si pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $a_{i,j} = a_{j,i}$.
L'ensemble des matrices d'ordre n symétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 17 : La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -5 & 12 \\ -5 & 0 & -4 \\ 12 & -4 & 39 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est symétrique.

Définition II.13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **antisymétrique** si ${}^tA = -A$ c'est-à-dire si pour tout $1 \leqslant i,j \leqslant n$, $a_{i,j} = -a_{j,i}$.
L'ensemble des matrices d'ordre n antisymétriques à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 18 : Une matrice antisymétrique a nécessairement tous ses coefficients diagonaux nuls.

Exemple 19 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -5 & 12 \\ 5 & 0 & -4 \\ -12 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

Proposition II.14

Les ensembles $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par combinaison linéaires.

- Si $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.
- Si $A, B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ alors $\lambda A + \mu B \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.

II.4 La trace

Définition II.15

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A notée $\operatorname{tr}(A)$ l'élément dans $\mathbb{K}$ défini comme étant la somme des éléments diagonaux de A :

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=0}^{n} a_{i,i}.$$

Exemple 20 :

- Si $A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 2 & -1 & 14 \\ 5 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ alors $\operatorname{tr}(A) = -4 - 1 + 13 = 8$.
- Si $A \in \mathscr{A}_n(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{tr}(A) = 0$.
- $\operatorname{tr}(I_n) = n$.

Proposition II.16

La trace est linéaire : pour tout $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

1. $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.

Proposition II.17

Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Démonstration. Soient $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,j}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} a_{i,k} b_{k,i}.$$

Par propriété sur les sommes rectangulaires :

$$\operatorname{tr}(AB) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{n} b_{k,i} a_{i,k}.$$

En renommant les indices, on obtient que

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} b_{i,k} a_{k,i} = \mathrm{tr}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} b_{i,k} a_{k,j} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \right) = \mathrm{tr}\,(BA)\,.$$

□