Chapitre XI : Les Systèmes Linéaires

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Définition

I.1 Systèmes linéaires

Définition I.1

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ deux entiers naturels non nuls, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \dots, x_p$ tout système (S) défini par

$$(S)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 & L_1 \\ \quad\vdots & \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p = b_i & L_i \\ \quad\vdots & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n & L_n \end{cases}$$

Vocabulaire :

- Les nombres $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$, sont appelés les **coefficients** du système (S).
- Le vecteur colonne $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est appelé le **second membre** de (S).
- Les x_j pour $j \in [\![1,p]\!]$ sont les **inconnues** du système (S).
- Les équations L_i pour $i \in [\![1,n]\!]$ sont les **lignes** ou les **équations** du système (S).

Définition I.2

- Si pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $b_i = 0$ alors le système

$$(S_0)\ \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,j}x_j + \cdots + a_{i,p}x_p = 0 \\ \quad\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

  est dit **homogène**.
- On appelle **système homogène associé** au système (S), noté (S_0), le système linéaire ayant les mêmes coefficients que (S) et de second membre nul.

Définition I.3

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)$ et (S) un système linéaire de n équations et p inconnues.

1. Une **solution** du système (S) est un p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbb{K}^p$ vérifiant les p équations de (S).
2. Un système qui n'admet pas de solution est dit **incompatible**.
3. Un système qui admet des solutions est dit **compatible**.

Remarque 1 : Nous verrons qu'un système linéaire peut admettre :

- aucune solution,

- une unique solution,
- une infinité de solution.

I.2 Systèmes équivalents

Définition I.4

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et (S) un système linéaire à n équations et p inconnues. Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$. On appelle opération élémentaire sur les lignes du système (S), l'une des opérations suivantes.

- **(Permutation)** On peut échanger les lignes L_i et L_j. On note alors $L_i \leftrightarrow L_j$.
- **(Dilatation)** On peut multiplier la ligne L_i par une constante NON NULLE $\lambda \in \mathbb{K}*$. On note alors $L_i \leftarrow \lambda L_i$
- **(Transvection)** On peut ajouter à la ligne L_i un multiple de la ligne L_j. On note alors $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

Définition I.5

Deux systèmes (S) et (S') sont dits **équivalents** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note alors $(S) \Leftrightarrow (S')$.

Exemple 2 : Soit (S) : $\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases}$. Voici des exemples d'opérations élémentaires :

- Echange des lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases} \qquad L_2 \leftrightarrow L_3$$

- Multiplication de la ligne 4 par 2 :

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+2y+z+3t=1 \\ 2x+2y+2z+2t=8 \end{cases} \qquad L_4 \leftarrow 2L_4$$

- Soustraction à la ligne 1 de 2 fois la ligne 3 :

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=0 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3y-3z-5t=-2 \\ x-y+3z-t=-1 \\ x+2y+z+3t=1 \\ x+y+z+t=4 \end{cases} \qquad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$$

Théorème I.6

Deux systèmes linéaires équivalents ont le même ensemble de solutions.

I.3 Systèmes échelonnés

Définition I.7

Un système est dit **échelonné en lignes** si

1. une ligne nulle du système implique que toutes les lignes suivantes sont nulles,
2. chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la ligne précédente.

Définition I.8

Soit (S) un système échelonné. Le premier coefficient non nul de chaque ligne (non entièrement nulle) est appelé **un pivot** du système (S).

Exemple 3 : Voici des exemples de systèmes échelonnés :

1. $\left\{\begin{array}{llllll} \boxed{1}x & +2y & -z & +2t & & =4 \\ & \boxed{-1}y & +2z & & & =3 \\ & & & \boxed{5}t & & =1 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{llllll} \boxed{5}x & +y & & +2t & -u & =-2 \\ & & & & \boxed{2}u & =3 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{llllll} \boxed{5}x & +y & & 2t & -u & =-2 \\ & \boxed{1}y & +z & -t & +3u & =3 \\ & & \boxed{3}z & -2t & +5u & =6 \\ & & & \boxed{1}t & & =1 \\ & & & & \boxed{-1}u & =1 \\ & & & & 0 & =2 \end{array}\right.$

Voici des exemples de systèmes **non** échelonnés :

1. $\left\{\begin{array}{lllll} x & +2y & -z & +t & =4 \\ x & -y & & +2t & =3 \\ & & & 5t & =-2 \end{array}\right.$

2. $\left\{\begin{array}{llllll} 5x & +y & & +2t & -u & =-2 \\ & y & +z & +t & +u & =0 \\ & 2y & -z & +3t & -u & =1 \end{array}\right.$

3. $\left\{\begin{array}{llllll} 5x & +y & & 2t & -u & =-2 \\ & y & +z & -t & +3u & =3 \\ & & 3z & -2t & +5u & =6 \\ & & z & +t & & =1 \\ & & & 2t & & =-1 \end{array}\right.$

II Résolution des systèmes linéaires

II.1 Résolutions des systèmes échelonnés

Un système linéaire se résout facilement par substitutions successive des variables de bas vers le haut.

Exemple 4 : On considère le système échelonné (S_1) : $\left\{\begin{array}{rcl} \boxed{2}x+y-z & = & 2 \\ \boxed{1}y+3z & = & 1 \\ \boxed{-1}z & = & -1 \end{array}\right.$. Ce système possède trois pivots : un pour chaque inconnue x, y et z. La troisième équation nous donne z. En injectant la valeur de z trouvée dans la seconde équation, on obtient y. Enfin en injectant les valeurs trouvées de y et z dans la première équation, on obtient x.

$$\left\{\begin{array}{rcl} \boxed{2}x+y-z & = & 2 \\ \boxed{1}y+3z & = & 1 \\ \boxed{-1}z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-1 & = & 2 \\ y+3\times 1 & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 2x+-2-1 & = & 2 \\ y & = & -2 \\ z & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{5}{2} \\ y & = & -2 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Ainsi (S_1) admet pour unique solution le triplet $\left(\frac{5}{2}, -2, 1\right)$.

Définition II.1

Soient $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ deux entiers naturels non nuls et (S) un système échelonné à n équations et p inconnues notées $x_1, \ldots, x_p$. Soit $j \in [\![1;p]\!]$.

1. Si x_j est le premier terme non nul d'une ligne du système (S), son coefficient est donc un pivot du système, alors x_j est une **inconnue principal**.
2. Sinon, si x_j n'est jamais le premier terme non nul d'une ligne i et n'est donc associé à aucun pivot, alors x_j est une **inconnue secondaire** ou encore une **inconnue paramètre**.

Proposition II.2

Pour un système échelonné, trois situations peuvent se présenter :

1. Il existe une ligne i du système pour laquelle tous les coefficients de la ligne sont nuls sans que le second membre associé b_i le soit. Le système n'admet alors aucune solution, il est incompatible.
2. Il existe des inconnues paramètres, c'est-à-dire sans pivots. On ne peut pas déterminer leurs valeurs et le système admet une infinité de solutions.
3. Si chaque ligne admet un pivot et que chaque inconnue est principale, c'est-à-dire associée à un pivot, alors le système admet une unique solution.

Exemple 5 :

1. On considère le système (S_2) : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y-z & = & -1 \\ 0 & = & 1 \end{array}\right.$ Le système est bien échelonné, mais la troisième équation est impossible, ainsi il n'a a pas de solution.
2. On considère le système (S_3) : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right.$ C'est bien un système échelonné. Il n'y a pas de pivot pour l'inconnue z. On ne pourra pas déterminer la valeur de z lors de la remontée. C'est une **inconnue paramètre** tandis que x, y sont les **inconnues principales**. Lors de la remontée, on exprime donc x et y en fonction de z :
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 1 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+z-1+z & = & 1 \\ y & = & z-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2-2z \\ y & = & z-1 \end{array}\right.$$
Il y a une infinité de solutions qui dépendent du paramètre z. L'ensemble E_3 des solutions de (S_3) est :
$$E_3 = \{(2-2z, z-1, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
Cet ensemble peut aussi s'exprimer ainsi : $E_3 = \{(2,-1,0)+z(-2,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$. On reconnait ici une représentation paramétrique de la droite de l'espace passant par le point de coordonnée $(2,-1,0)$ et dirigée par le vecteur de coordonnées $(-2,1,1)$. L'ensemble des vecteurs colinéaires à $(-2,1,1)$ est noté $\mathrm{Vect}((-2,1,1))$, c'est-à-dire que l'on a $\mathrm{Vect}((-2,1,1)) = \{z(-2,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$. Alors on note
$$E_3 = (2,-1,0) + \mathrm{Vect}((-2,1,1)).$$
3. On considère le système (S_4) : $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ z+2t & = & -1 \end{array}\right.$ Le système (S_4) est bien échelonné. Il n'y a pas de pivot pour les inconnues y et t. On ne pourra pas donc pas déterminer leurs valeurs, ce sont les inconnues paramètres tandis que x, z sont les inconnues principales. Lors de la remontée, on exprime donc x et z en fonction de y et t :
$$(S_4) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ z+2t & = & -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+y-1-2t+t & = & 1 \\ z & = & -1-2t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2-y+t \\ z & = & -1-2t \end{array}\right.$$
Ainsi l'ensemble des solutions est
$$\begin{aligned} E_4 &= \left\{(2-y+t, y, -1-2t, t) \;\middle|\; (y,t) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(2,0,-1,0)+y(-1,1,0,0)+t(1,0,-2,1) \;\middle|\; (y,t) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= (2,0,-1,0) + \mathrm{Vect}((-1,1,0,0),(1,0,-2,1)) \end{aligned}$$
Il s'agit d'un plan affine de $\mathbb{R}^4$.

II.2 Méthode du pivot de Gauss : échelonnement

Dans le cas d'un système linéaire général, on le résout en deux temps :

1. On applique la méthode du pivot de Gauss présentée ci-dessous pour obtenir un nouveau système échelonné équivalent au système d'origine.
2. On résout le système échelonné comme vu dans le paragraphe précédent.

Application de la méthode du pivot de Gauss :
On cherche à résoudre le système (S) suivant :
$$(S) : \left\{\begin{array}{r} 3y+2z+2t=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{array}\right.$$

1. On sélectionne dans la première colonne un coefficient non nul et on échange la ligne le contenant avec la première ligne :
$$(S) : \begin{cases} 3y+2z+2t=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ x-y+2z-t=3 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases}$$
2. A l'aide de ce pivot, on annule les coefficients de la première inconnue dans les autres équations :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 5x+y+9z-2t=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4-5L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases}$$
3. On fixe ensuite la première ligne et on réitère avec la seconde inconnue, puis la troisième et ainsi de suite. On aboutit de proche en proche à un système échelonné :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 6y+2z+2t=-4 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow \frac{L_2}{2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ 3y+2z+2t=1 \\ 6y-z+3t=-11 \end{cases} \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3-L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4-2L_2}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ z+t=3 \\ -3z+t=-7 \end{cases}$$
$$\underset{L_4 \leftarrow L_4+3L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-y+2z-t=3 \\ 3y+z+t=-2 \\ z+t=3 \\ 4t=2 \end{cases}$$
Le système obtenu est échelonné et admet une unique solution. En effectuant une « remontée », on obtient :
$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{19}{6} \\ y=-\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{5}{2} \\ t=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Théorème II.3 (Pivot de Gauss)

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné.

Corollaire II.4

Un système linéaire admet aucune, une ou une infinité de solutions.

Remarque 6 : Le système échelonné obtenu par la méthode du pivot de Gauss n'est pas unique. Pour autant, le nombre de pivot après échelonnement est invariant. De ce résultat, découle la définition suivante.

Définition II.5

On appelle **rang** d'un système le nombre de pivots ou d'inconnues principales obtenues après échelonnement.

Remarque 7 :

- Si (S) est un système à n équations et p inconnues alors le rang de (S) est inférieur à n et à p.
- Soit r le rang de (S). Le nombre d'inconnues secondaires de (S) est alors $p-r$.

II.3 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition II.6

Soit (S_0) un système linéaire homogène à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues. L'ensemble E_0 des solutions de (S_0) est un espace vectoriel. En effet,

1. L'élément nul est dans E_0 : le p-uplet $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{K}^p$ est toujours un élément de E_0.
2. L'ensemble E_0 est stable par combinaison linéaire : pour tout $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, tout $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{K}^p$ et tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$, si $x \in E_0$ et $y \in E_0$, alors

$$\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_p + \mu y_p) \in E_0.$$

Remarque 8 : D'après le premier point, un système homogène est toujours compatible.

Proposition II.7

Soient (S) un système linéaire à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues, E l'ensemble de ses solutions, (S_0) le système homogène associé et E_0 l'ensemble des solutions du système homogène. L'ensemble E est un espace affine de direction E_0 : si $a = (a_1, \ldots, a_p)$ est une solution de (S) (i.e. un élément de E) alors

$$E = a + E_0 = \{ (a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = (x_1, \ldots, x_n) \in E_0 \}.$$

Proposition II.8

Soient (S) un système linéaire à $n \in \mathbb{N}^*$ équations et $p \in \mathbb{N}^*$ inconnues. On note r son rang et on suppose que (S) est compatible.

1. Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $r = p$.
2. Un système (S) admet une infinité de solutions si et seulement si $r < p$. Dans ce cas (S_0), le système homogène associé est « engendré » par $p - r$ solutions, c'est-à-dire que toutes les solutions de (S_0) peuvent s'obtenir par combinaison linéaire de ces solutions « particulières ».

II.4 Interprétation géométrique

Supposons que $p = 2$. Si l'on rapporte le plan euclidien à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$:

- les équations L_i du système sont vues comme des équations de droites.
- les solutions du système (S) sont vues comme des points du plan.

Avec ces interprétations, les solutions du système (S) sont les éventuels points d'intersections des droites D_i ayant pour équation L_i et peuvent décrire une droite, un point ou l'ensemble vide.

Exemple 9 : Soit (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x + 3y = 1$ et D_2 la droite d'équation $x - y = 0$. Les droites D_1 et D_2 ont un unique point d'intersection $P(1/5, 1/5)$ qui est l'unique solution du système (S).

Exemple 10 : Soit (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \\ 5x + 5y = 2 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x + 3y = 1$, D_2 la droite d'équation $x - y = 0$ et D_3 celle d'équation $5x + 5y = 2$. Les droites D_1, D_2 et D_3 sont concourantes en $P(1/5, 1/5)$. Le système admet le couple $(1/5, 1/5)$ pour unique solution.

Exemple 11 : Soit (S) : $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \\ -x + 3y = 1 \end{cases}$. Notons D_1 la droite d'équation $2x + 3y = 1$, D_2 la droite d'équation $x - y = 0$ et D_3 celle d'équation $-x + 3y = 1$. Les droites D_1, D_2 et D_3 ne sont pas concourantes, le système n'admet pas de solutions.

D'autres situations sont possibles.

- On peut avoir n droites confondues. Dans ce cas il y a une infinité de solutions.
- On peut avoir n droites parallèles et distinctes. Dans ce cas il n'y a pas de solutions.

Supposons à présent que $p=3$. On rapporte cette fois-ci l'espace euclidien à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$:

- les équations L_i du système (S) sont vues comme des équations de plans.
- les solutions du système (S) sont vues comme des points de l'espace.

Avec ces interprétations, les solutions du système (S) sont les éventuels points d'intersections des plans P_i ayant pour équation L_i et peuvent décrire un plan, une droite, un point ou l'ensemble vide.

Exemple 12 : Soit (S) : $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ 3x-y-z=2 \end{cases}$. Notons P_1 le plan d'équation $x+y+z=-2$, P_2 le plan d'équation $x-y+z=-2$ et P_3 le plan d'équation $3x-y-z=2$. Ces trois plans sont concourants au point $M(0,0,-2)$, l'unique solution du système (S).

Exemple 13 : Soit (S) : $\begin{cases} x+y+z=-2 \\ x-y+z=-2 \\ x+z=4 \end{cases}$. Notons P_1 le plan d'équation $x+y+z=-2$, P_2 le plan d'équation $x-y+z=-2$ et P_3 le plan d'équation $x+z=4$. Ces trois plans sont sécants deux à deux mais ne sont pas concourant : le système n'admet pas de solutions.
D'autres situations sont possibles.

- On peut avoir n plans sécants dont l'intersection forment une droite ; dans ce cas il y a une infinité de solution.
- On peut avoir n plans parallèles et distincts : dans ce cas il n'y a pas de solutions.
- On peut avoir n plans confondus ; dans ce cas il y a une infinité de solutions.

III Formulation matricielle des systèmes linéaires

III.1 Version matricielle du système

On reprend les notations de la définition I.1 : soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$ deux entiers non nuls, $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $b=(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^n$ un n-uplet d'éléments de $\mathbb{K}$. On considère alors le système (S) d'inconnu $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{K}^p$ défini par

$$(S)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\dots+a_{1,j}x_j+\dots+a_{1,p}x_p=b_1 & L_1 \\ \quad\vdots & \\ a_{i,1}x_1+a_{i,2}x_2+\dots+a_{i,j}x_j+\dots+a_{i,p}x_p=b_i & L_i \\ \quad\vdots & \\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\dots+a_{n,j}x_j+\dots+a_{n,p}x_p=b_n & L_n \end{cases}$$

Définition III.1

On appelle **matrice associée** au système (S) la matrice $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ci-dessous. Le second membre $(b_1,\dots,b_n)$, respectivement l'inconnue $(x_1,\dots,x_p)$ est également noté sous forme matricielle B respectivement X.

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Le système (S) est alors équivalent à l'équation matricielle suivante d'inconnue le vecteur colonne $X\in\mathbb{K}^n$:

$$AX=B.$$

Remarque 14 : Dans le cas d'une matrice carrée inversible : si $n=p$ et si $A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors le système $AX=B$ admet une unique solution donnée par $X=A^{-1}B$. Résoudre le système (S) est alors équivalent à calculer A^{-1}.

Définition III.2

On appelle **matrice augmentée** du système (S) notée $(A|B)$ la matrice

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

III.2 Version matricielle des opérations élémentaires

Définition III.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, n\}$ et $l \in \{1, \dots, p\}$. On note E_{kl} la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf $a_{k,l}$ qui vaut 1 :

$$E_{k,l} = (\delta_{ik}\delta_{lj})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

où pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, $\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker défini par $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Exemple 15 : Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ il y a 4 matrices de ce type :

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition III.4

Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire des matrices E_{kl}. De plus cette décomposition est unique.

Remarque 16 : On dit que la famille de matrices $(E_{kl})_{(k,l) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ est une base de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. Il en effet évident que toute matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ s'écrit : $A = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_{i,j} E_{ij}$. □

Exemple 17 : Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, toute matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s'écrit $A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque 18 : Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $u \in [\![1;n]\!]$, $v \in [\![1;m]\!]$, $k \in [\![1;m]\!]$ et $l \in [\![1;p]\!]$, on a

$$E_{uv} \times E_{kl} = \begin{cases} E_{ul} & \text{si } v = k \\ 0 & \text{si } v \neq k \end{cases}$$

Par exemple, dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$:

$$E_{12}E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad E_{22}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On retrouve alors la formule du produit :

$$AB = \left(\sum_{(i,k) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!]} a_{i,k} E_{ik}\right)\left(\sum_{(l,j) \in [\![1;m]\!] \times [\![1;p]\!]} b_{l,j} E_{lj}\right).$$

Nous sommes dans le cas de sommes à variables séparées (cf chapitre IV calcul algébrique). On a donc

$$AB = \sum_{(i,k,l,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;m]\!] \times [\![1;m]\!] \times [\![1;p]\!]} a_{i,k} b_{l,j} E_{ik} E_{lj}$$

Seuls les termes où $k = l$ seront non nuls. On obtient donc

$$AB = \sum_{(i,k,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;m]\!]\times[\![1;p]\!]} a_{i,k}b_{k,j}E_{ij} = \sum_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{m} a_{i,k}b_{k,j}\right)}_{=\text{coefficient } i,j \text{ de la matrice } AB} E_{ij}.$$

Définition III.5

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **matrice élémentaire** toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant l'une des définitions ci-dessous. Soient $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. La matrice $T_{i,j}$ définie par
$$T_{ij} = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji},$$
est appelée **matrice de transposition**.
2. La matrice $D_i(\lambda)$ définie par
$$D_i(\lambda) = I_n - E_{ii} + \lambda E_{ii},$$
est appelée **matrice de dilatation**.
3. La matrice $U_{ij}(\lambda)$ définie par
$$U_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij},$$
est appelée **matrice de transvection**.

Exemple 19 : Dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{K})$:

$$T_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_{13}(-4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition III.6 (opérations élémentaires)

Soient $n,p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dans ce qui suit, les matrices élémentaires sont dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soient $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, λ **non nul**.

1. Multiplier A par $T_{i,j}$ revient à échanger la ligne i et j de la matrice A.
   Autrement dit, la matrice $T_{ij}A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **permutation/transposition** : $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplier A par $D_i(\lambda)$ revient à multiplier la ligne i de la matrice A par λ.
   Autrement dit, la matrice $D_i(\lambda)A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **dilatation** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
3. Multiplier A par $U_{ij}(\lambda)A$ revient à ajouter à la ligne i, λ fois la ligne j de la matrice A.
   Autrement dit, la matrice $U_{ij}(\lambda)A$ se déduit de A par l'opération élémentaire de **transvection** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Remarque 20 : Soit E une matrice élémentaire. Puisque $E = E \times I_n$, la matrice E se déduit de I_n en effectuant l'opération élémentaire correspondante à E.
Par exemple, dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{R})$

- pour déterminer T_{13}, on échange les lignes 1 et 3 de la matrice I_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} T_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- pour déterminer $D_2(\lambda)$ on effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow \lambda L_2$ sur la matrice I_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow \lambda L_2}{\longrightarrow} D_2(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- pour déterminer $U_{24}(\lambda)$ on effectue l'opération élémentaire $L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_4$ sur la matrice I_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_4}{\longrightarrow} U_{24}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 21 : Grâce à l'interprétation de la proposition III.6, on vérifie facilement les propriétés suivantes :

1. T_{ij} est inversible, d'inverse elle-même : $T_{ij} \times T_{ij} = I_n$.
2. $D_i(\lambda) \times D_i(\mu) = D_i(\lambda\mu)$.
3. $D_i(1) = I_n$.
4. Pour tout $\lambda \neq 0$, $D_i(\lambda)$ est inversible est $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(1/\lambda)$.
5. $U_{ij}(0) = I_n$.
6. $U_{ij}(\lambda) \times U_{ij}(\mu) = U_{ij}(\lambda + \mu)$.
7. $U_{ij}(\lambda)$ est inversible et $U_{ij}(\lambda)^{-1} = U_{ij}(-\lambda)$.

Proposition III.7

Effectuer une opération élémentaire sur un système linaire (S) est équivalent à effectuer une opération élémentaire sur sa matrice augmentée $(\, A \mid B \,)$.

III.3 Matrices équivalentes par lignes et matrice échelonnées

Définition III.8

Deux matrices $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}'$ sont dites **équivalentes par lignes** si l'on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. On note $\mathscr{M} \underset{L}{\sim} \mathscr{M}'$.

Définition III.9

Une matrice est dite **échelonnée en lignes** si elle vérifient les deux propriétés suivantes.

1. Si une ligne est nulle, toutes les lignes suivantes sont nulles.
2. Chaque ligne non nulle commence par davantage de 0 que la ligne précédente.

Le premier terme non nul de chaque ligne est appelé **pivot** de la matrice.

Exemple 22 : Voici des exemples de matrices échelonnées :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{5} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{5} & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \boxed{5} & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Voici des exemples de matrices **non** échelonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Définition III.10

Une matrice échelonnée en ligne est dite **échelonnée réduite** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et sont les seuls coefficients non nuls de leur colonne.

Exemple 23 : Voici des exemples de matrices échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

IV Traduction matricielle de l'algorithme de Gauss-Jordan

IV.1 Construction de la matrice échelonnée réduite

Exemple 24 : On considère le système linéaire (S) : $\begin{cases} 2y + z = -1 \\ x + 3y + z = 0 \\ 2x + 4y = 6 \end{cases}$. La matrice $(\,A \mid B\,)$ augmentée associée au système (S) est alors donnée par

$$(A \mid B) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss à la matrice $(A \mid B)$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{pmatrix}$$

On obtient ainsi une matrice échelonnée équivalente à $(A \mid B)$. On pourrait à ce stade écrire le système associé à la matrice obtenue. Il est bien sur échelonné et équivalent au système initial (S). On peut alors trouver les solutions en effectuant une remontée. Faire une remontée est équivalent à obtenir une matrice échelonnée réduite :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 5 \end{pmatrix} & \underset{L}{\overset{L_3 \leftarrow -L_3}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \\ & \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2/2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \\ & \underset{L}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3/2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \\ & \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \\ & \underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le système associé à la matrice échelonnée réduite obtenue est alors élémentaire :

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -5 \end{cases}$$

Ainsi (S) admet pour unique solution le triplet $(-1, 2, -5)$.

Théorème IV.1

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice échelonnée réduite $R \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et une matrice $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ inversible et produit de matrices élémentaires telles que

$$FA = R.$$

Démonstration. (esquisse).
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice A, on la multiplie à chaque étape par une matrice élémentaire :

$$A \underset{L}{\sim} A_1 = F_1 A \underset{L}{\sim} A_2 = F_2 A_1 = F_2 F_1 A \underset{L}{\sim} \dots \underset{L}{\sim} R = A_m = F_m F_{m-1} \cdots F_2 F_1 A,$$

où chaque F_i est une matrice élémentaire et $R = A_m$ est une matrice échelonnée réduite. Chaque F_i est une matrice élémentaire et est donc une matrice inversible. Donc la matrice $F = F_1 \cdots F_n$ est aussi une matrice inversible.
L'unicité est admise.

□

Dans le théorème précédent la matrice A est équivalente à R, $A \underset{L}{\sim} R$.

Corollaire IV.2

1. Toute matrice est équivalente en lignes à une matrice échelonnée.
2. Toute matrice est équivalente en lignes avec une unique matrice échelonnée réduite.

IV.2 Rang d'une matrice et nombre de solutions

Définition IV.3

On appelle **rang** d'une matrice M et on note $\mathrm{rg}(M)$, le nombre de pivots de sa matrice échelonnée réduite.

Exemple 25 : Par exemple, la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ a pour réduite la matrice $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix}$. Elle est donc de rang 3.

Remarque 26 :

- Si A a n lignes et p colonnes, on a $\mathrm{rg}(A) \leqslant \min(n, p)$.
- Attention si $(\,A \mid B\,)$ est la matrice augmentée associée à un système linéaire (S), le rang de (S) est égal au rang de la matrice A et non pas au rang de la matrice $(\,A \mid B\,)$.

Théorème IV.4

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et (S) un système à n équations et p inconnues. Soit $(\,A \mid B\,)$ sa matrice augmentée.

1. Le système (S) est compatible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\,A \mid B\,)$.
2. Le système (S) admet une unique solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\,A \mid B\,) = p$.
3. Le système (S) admet une infinité de solution si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ et $\mathrm{rg}(A) < p$. Dans ce cas E_0, l'ensemble des solutions du système homogène (S_0) associé à (S) est engendré par $p - \mathrm{rg}(A)$ vecteurs.
4. Le nombre d'inconnues secondaires de (S) est $p - \mathrm{rg}(A)$.

IV.3 Exemples de résolutions de systèmes

Plan de résolution d'un système linéaire :

1. On écrit la matrice augmentée de (S).
2. On applique l'algorithme du pivot de Gauss-Jordan.
3. On analyse l'existence et le nombre de solutions/paramètres.
4. On écrit le système échelonné réduit de (S) et on conclut.

Exemple 27 : On cherche à résoudre le système (S) : $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=1 \\ x-y-z=-1 \end{cases}$. La matrice augmentée associée à (S) est :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_1 \\ L_2\leftarrow L_2-L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow -L_2/2 \\ L_3\leftarrow -L_3/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Ainsi la matrice $(A|B)$ est équivalente en ligne à la matrice $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$. On a donc $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B) = p$. Le système admet une unique solution. Lorsqu'on écrit le système échelonné réduit équivalent à (S) on a

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ainsi $(1/2, 1/2, 1)$ est l'unique solution de (S).

Exemple 28 : Soit à résoudre (S) : $\begin{cases} x+y+z+t=2 \\ x-y+z-t=1 \\ x-y-z+t=0 \end{cases}$. La matrice augmentée associée à (S) est :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \underset{L}{\overset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_3\leftarrow -L_3/2 \\ L_2\leftarrow -L_2/2}}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_3}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\underset{L}{\overset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\sim}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \end{array}\right).$$

On a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|B)$ et $\mathrm{rg}(A) < p$ donc il y a une infinité de solutions. Plus précisément il y a $p - \mathrm{rg}(A) = 1$ inconnue secondaire qui est t. Le système échelonné réduit équivalent est alors

$$(S) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + t = 1 \\ y + t = 1/2 \\ z - t = 1/2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1/2 - t \\ z = 1/2 + t \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est donc $E = \{(1-t, 1/2 - t, 1/2 + t) \mid t \in \mathbb{K}\}$.

V Complément sur les matrices

V.1 Méthode pour déterminer F, la matrice telle que $FA = R$.

On reprend les notations du théorème IV.1 : soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ F une matrice produit de matrices élémentaires et R une matrice échelonnée réduite. Comme $FI_n = F$, pour déterminer F, il suffit d'effectuer à la matrice I_n, la même suite d'opérations élémentaires que l'on applique à A pour obtenir R.

Exemple 29 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R.$$

Pour déterminer F, on effectue les même opérations à la matrice I_3 :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_1}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = F.$$

Vérifions que $FA = R$, on a bien

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice F est un produit de trois matrices élémentaires : les trois matrices élémentaires correspondants aux opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ i.e. les matrices

$$U_{21}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_{32}(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_{23}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier que l'on a $F = U_{23}(-1)U_{32}(1)U_{21}(1)$.

V.2 Caractérisation de l'inversibilité

Théorème V.1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible
2. $A \underset{L}{\sim} I_n$
3. $\mathrm{rg}(A) = n$
4. Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle
5. Pour tout vecteur colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution
6. Pour tout vecteur colonne $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution

Démonstration.

- (1) $\Rightarrow$ (5). Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $X, B \in\in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors
$$AX = B \qquad \Leftrightarrow \qquad X = A^{-1}B.$$
Donc l'équation $AX = B$ d'inconnue X admet pour unique solution $X = A^{-1}B$.
- (5) $\Rightarrow$ (6). Qui peut le plus peut le moins.
- (6) $\Rightarrow$ (3). Procédons par contraposée. Supposons que $\mathrm{rg}(A) < n$. Posons R la réduite de A et F la matrice produit de matrices élémentaires telle que $FA = R$. Par définition du rang, nécessairement la dernière ligne de R est nulle (on a moins de pivots que de lignes donc une ligne au moins est nulle et puisque R est réduite si une ligne est nulle toutes les suivantes sont nulles notamment la dernière). Donc pour
$$B' = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$
l'équation $RX = B'$ n'admet aucune solution. Or puisque F est un produit de matrices élémentaires, F est inversible et son inverse F^{-1} est également un produit de matrices élémentaires. Donc l'équation $RX = B'$ est équivalente à l'équation $F^{-1}R = F^{-1}B'$. Donc par définition de A, $RX = B' \Leftrightarrow A = F^{-1}B'$. En posant $B = F^{-1}B'$, on obtient $RX = B' \Leftrightarrow AX = B$. Nous avons vu que $RX = B'$ n'admet aucune solution donc l'équation $AX = B$ n'admet aucune solution non plus ce qui est bien la négation du point (6).
- (3) $\Rightarrow$ (2). Soit R la matrice réduite de A et supposons $\mathrm{rg}(A) = n$. La matrice R possède exactement n pivots et est de taille $n \times n$. Nécessairement $R = I_n$ et donc $A \underset{L}{\sim} I_n$.
- (2) $\Rightarrow$ (1). Si $A \underset{L}{\sim} I_n$ alors par définition, il existe F une matrice produit de matrices élémentaires, et donc inversible, telle que $FA = I_n$. Puisque F est inversible, $A = F^{-1}I_n = F^{-1}$ et naturellement F^{-1} est inversible donc A est inversible.
- (2) $\Rightarrow$ (4). On sait que $A \underset{L}{\sim} I_n$ si et seulement s'il existe une matrice F produit de matrices élémentaires telle que $FA = I_n$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On a alors $AX = 0 \Leftrightarrow FAX = F \times 0 = 0 \Leftrightarrow X = 0$ ce qui démontre le point (4).
- (4) $\Rightarrow$ (3). On procède comme pour démontrer que (6) $\Rightarrow$ (3). Par contraposée si $\mathrm{rg}(A) < n$ alors sa réduite R a sa dernière ligne qui est nulle. Donc
$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$
est une solution de $RX = 0$ et donc également de l'équation $AX = F^{-1}RX = F^{-1}0 = 0$. Donc l'équation $AX = 0$ possède une solution non nulle ce qui est bien la négation de (4).

$\square$

Proposition V.2 (Cas particulier)

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas on a
$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
La quantité $ad - bc$ est appelée **le déterminant** de A que l'on note $\det(A)$.

Corollaire V.3

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si sa réduite est la matrice I_n. Soit F la matrice, produit de matrices élémentaires, telle que $FA = I_n$. Alors $A^{-1} = F$.

Remarque 30 : Toute matrice inversible est le produit de matrices élémentaires.

V.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors sa réduite est la matrice $R = I_n$. Soit F la matrice, produit de matrices élémentaires, telle que $FA = R$. Alors $FA = I_n$ et donc $A^{-1} = F$. Ainsi, pour déterminer si une matrice est inversible et calculer le cas échéant son inverse, on procède comme suit.

1. On réduit la matrice A par l'algorithme de Gauss-Jordan en notant soigneusement les opérations élémentaires.
2. Si la réduite est I_n, on en déduit que A est inversible.
3. On applique exactement les mêmes opérations élémentaires à la matrice I_n pour déterminer $F = A^{-1}$.

Exemple 31 :

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L1}{\overset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

La matrice est échelonnée. On a $\mathrm{rg}(A) = 3$, elle est donc inversible. On continue l'algorithme :

$$\begin{aligned} A & \underset{L_3 \leftarrow -L_3}{\overset{L_2 \leftarrow L_2/(-2)}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \\ & \overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \end{aligned}$$

Alors

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V.4 Opérations élémentaires sur les colonnes

Une matrice est dite **échelonnée en colonnes** si sa transposée est échelonnée en ligne. Les premiers éléments non nuls de chaque colonne sont les **pivots**.

Exemple 32 : Les matrices suivantes sont échelonnées en colonnes

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 2 & \boxed{-1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & \boxed{5} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{2} & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite **échelonnée réduite en colonnes** si sa transposée est échelonnée réduite en ligne.

Exemple 33 : La matrice $\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$ est échelonnée réduite en colonnes

Il est possible de trouver la réduite en colonne d'une matrice A en effectuant des opérations élémentaires sur **ses colonnes**. Les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice sont codées de la même manière que les opérations sur les lignes :

- échange de deux colonnes : $C_i \leftrightarrow C_j$
- dilatation d'une colonne : $C_i \leftarrow \lambda C_i$, avec $\lambda \neq 0$

- ajout à la colonne C_i un multiple de C_j : $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$

Définition V.4

Deux matrices A et A' déduites l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les colonnes sont dites **équivalentes par colonnes**. On note $A \underset{C}{\sim} A'$.

Théorème V.5 (Variante du théorème de Gauss-Jordan)

Toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est **équivalente par colonnes** à une unique matrice échelonnée réduite en colonnes.

Remarque 34 : Le rang de A est aussi égal au nombre de pivots de sa réduite en colonnes.

Exercice 35 : soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la réduite en colonnes de A.

Traduction matricielle des opérations élémentaires sur les colonnes. Comme les opérations élémentaires sur les lignes, les opérations élémentaires sur les colonnes correspondent à un produit matriciel :

1. La matrice AT_{ij} se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_i \leftrightarrow C_j$.
2. La matrice $AD_i(\lambda)$ se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_i \leftarrow \lambda C_i$.
3. La matrice $AU_{ij}(\lambda)$ se déduit de A par l'opération élémentaire : $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ (attention à la différence avec les opérations sur les lignes).

Comme pour les opérations élémentaires sur les lignes. Une matrice élémentaire E se déduit de I_n en effectuant l'opération élémentaires sur les colonnes à laquelle elle correspond.

Théorème V.6

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice échelonnée réduite en colonne $R \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et une matrice $E \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, produit de matrices élémentaires et inversible telles que

$$AE = R.$$

Théorème V.7 L

a matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $A \underset{C}{\sim} I_n$.