Chapitre XIII : Analyse Asymptotique

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points distincts (i.e. ni vide ni un singleton). On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. On dit que I est un voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ si $a \in I$ ou $a = \sup(I)$ ou $a = \inf(I)$.

I Négligeabilité

I.1 Être négligeable

Définition I.1

- *Suites :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$ s'il existe $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbb{K}$ telle que
  1. $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
  2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \varepsilon_n v_n$.
- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. On dit que f est **négligeable** devant g en a, noté $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$ s'il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que
  1. $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$
  2. $\forall x \in I,\ f(x) = \varepsilon(x)g(x)$.

Lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang ou si g ne s'annule pas au voisinage de a, on obtient la définition équivalente suivante :

Définition I.2

- *Suites :* Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. On dit que la $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noté $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou encore $u_n \underset{n\to+\infty}{\ll} v_n$ si et seulement si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$
- *Fonctions :* Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. On suppose que g ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a). On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a, noté $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou encore $f(x) \underset{x\to a}{\ll} g(x)$ si et seulement si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Remarque 1 :

- Dans la définition de la négligeabilité pour les fonctions, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ n'est pas nécessairement un élément de I et peut même être égal à $\pm\infty$.
- Pour une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(1)$ si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. De même, pour $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$.
- La négligeabilité $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ est aussi parfois noté $f = o_a(g)$ ou $f(x) = o_a(g(x))$.

Exemple 2 :

1. $n = o(n^2)$,
2. $2^n = o(3^n)$,
3. $\dfrac{1}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$,
4. $x^2 \underset{x\to+\infty}{=} o(x^4)$,
5. $x^4 \underset{x\to 0}{=} o(x^2)$,

6. $\frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$, 7. $\frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \left(\frac{1}{x^2}\right)$.

Interprétation. Les petits o permettent de formaliser l'idée suivant laquelle les suites ou les fonctions en un point ont une « vitesse » de convergence et de comparer ces vitesses. Par exemple :

- Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0, et si $u_n = o(v_n)$, on dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge plus vite vers 0 que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- De même, si deux fonctions f, g converge vers 0 en a et si $f = o_a(g)$, on dira que la fonction f converge plus vite vers 0 que la fonction g en a.
- A l'inverse, si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et si $u_n = o(v_n)$ on dira que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge plus vite vers $+\infty$ que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (notez l'inversion de la rapidité par rapport au cas de la convergence vers 0).
- De même, si deux fonctions f, g tendent vers $+\infty$ en a et si $f = o_a(g)$, on dira que la fonction g tend plus vite vers $+\infty$ que la fonction f en a.

Attention ne confondez pas ordre de majoration et vitesse. Par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ est toujours plus grande que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ mais bien que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge « deux fois plus rapidement » que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il est faux d'affirmer que $v_n \ll u_n$. On dira plutôt que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont des vitesses de divergence comparables (à un facteur 2 près). Pour être négligeable il faut donc diverger/converger « *beaucoup* moins rapidement ».

I.2 Croissances comparées

Proposition I.3 (Croissances comparées)

Soient $A \in \mathbb{K}^*$, $(\alpha, \beta, a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^4$, $(c, \gamma) \in]1; +\infty[^2$.

1. En $+\infty$, on a
$$0 \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\gamma^x} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^\beta} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{\ln^\alpha(x)} \underset{x\to+\infty}{\ll} A \underset{x\to+\infty}{\ll} \ln^a(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} x^b \underset{x\to+\infty}{\ll} c^x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^x.$$
2. En 0, on a
$$0 \underset{x\to 0}{\ll} x^\alpha \underset{x\to 0}{\ll} A \underset{x\to 0}{\ll} |\ln(x)|^a \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x^b}.$$
3. Pour les suites, on a
$$0 \ll \frac{1}{\gamma^n} \ll \frac{1}{n^\beta} \ll \frac{1}{\ln^\alpha(n)} \ll A \ll \ln^a(n) \ll n^b \ll c^n \ll n^n \ll n!.$$

Remarque 3 : Nul n'est négligeable devant la suite/fonction nulle.

Démonstration. Tout ces résultats sont des conséquences des limites connues de croissances comparées. Exemple : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{c^x} = \lim_{x\to+\infty} x^b \mathrm{e}^{-x\ln(c)}$. Or $-\ln(c) < 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^b}{c^x} = \lim\limits_{t\to-\infty} |t|^b \mathrm{e}^{\ln(c)t} = 0$ ce qui implique par définition que $x^b \underset{x\to+\infty}{=} o\left(c^x\right)$.

Seul l'encadrement du factoriel reste à démontrer.

- Montrons que $(c^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $c > 1$, i.e. que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{c^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en $+\infty$. Notez que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant 1 > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant c$ (prendre par exemple $\lfloor c\rfloor + 1$). Donc pour tout $n \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$, on a
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{c}{k} = \underbrace{\prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}}_{=A_{n_0}} \prod_{k=n_0+1}^{n} \frac{c}{k}.$$
Pour tout $k \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$, on a $\frac{c}{k} \leqslant 1$. Donc, par positivité des termes manipulés, pour tout $n \geqslant n_0 + 1 \geqslant c$,
$$u_n \geqslant A_{n_0} \prod_{k=n_0+1}^{n} 1 = A_{n_0},$$

où $A_{n_0} = \prod_{k=1}^{n_0} \frac{c}{k}$ est un réel qui ne dépend que de n_0 et non de n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et majorée par $M = \max\left(A_{n_0}, \max_{k\in\{0,\dots n_0\}} u_k\right)$ et est donc bornée. Soit $n \geqslant 1$, on a alors

$$0 \leqslant u_n = u_{n-1} \times \frac{c}{n} \leqslant M \times \frac{c}{n}, \qquad \text{car } \frac{c}{n} > 0 \text{ et } u_{n-1} \leqslant M.$$

Donc par le théorème d'encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

et donc $c^n = o\,(n!)$.

- Montrons maintenant que $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant $(n^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n > 0$ donc nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{n!}{n^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. Pour tout $n \geqslant 2$, on a

$$0 \leqslant u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n}\right) \times \frac{1}{n} \leqslant \left(\prod_{k=2}^{n} 1\right) \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit donc que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. et donc $n! = o\,(n^n)$.

$\square$

Proposition I.4

Soient $a < b$, alors

1. $x^a \underset{x\to+\infty}{=} o\left(x^b\right)$
2. $x^b \underset{x\to 0}{=} o\,(x^a)$
3. $n^a \underset{n\to+\infty}{=} o\left(n^b\right)$
4. $\frac{1}{n^b} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^a}\right)$

I.3 Propriétés algébriques des petits o

Dans les propositions qui suivent, on fixe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a, f, g, h trois fonctions définies sur I.

Proposition I.5 (Transitivité des petits o)

1. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
2. *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$.

Proposition I.6 (Somme de petits o)

1. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$ alors $u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(w_n)$.
   Autrement dit, $o\,(w_n) + o\,(w_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\,(w_n)$.
2. *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$ alors $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$.
   Autrement dit $o\,(h(x)) + o\,(h(x)) \underset{x\to a}{=} o\,(h(x))$.

Proposition I.7 (Produits de petits o)

1. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(t_n)$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n t_n)$.
   Autrement dit $o\,(v_n)\,o\,(t_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\,(v_n t_n)$.
2. *Fonctions :* si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g_2(x))$ alors $f_1(x) f_2(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g_1(x) g_2(x))$.
   Autrement dit $o\,(g_1(x))\,o\,(g_2(x)) \underset{x\to a}{=} o\,(g_1(x) g_2(x))$.

Proposition I.8 (Les petits o absorbent les constantes non nulles)

1. *Suites :* soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λ NON NULLE, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(\lambda v_n)$.
   Autrement dit $\lambda\, o\,(v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\,(\lambda\, v_n) \underset{n\to+\infty}{=} o\,(v_n)$.
2. *Fonctions :* soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$, λ NON NULLE, si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(\lambda g(x))$.
   Autrement dit $\lambda\, o\,(g(x)) \underset{x\to a}{=} o\,(\lambda g(x)) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$

Proposition I.9 (Passage à l'inverse)

On suppose que les suites et les fonctions ne s'annulent pas.

1. *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{u_n}\right)$.
2. *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ alors $\frac{1}{g(x)} \underset{x\to a}{=} o\left(\frac{1}{f(x)}\right)$.

Proposition I.10

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g, deux fonctions définies sur I.

- *Suites :* Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(v_n)$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
- *Fonctions :* Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{\to} 0$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\to} 0$.
- *Suites :* Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o\,(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$.
- *Fonctions :* Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\,(g(x))$ et $f(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$ alors $g(x) \underset{x\to a}{\to} +\infty$.

Remarque 4 : Voici des manipulations importantes du petit o :

1. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$. Si $u \underset{x\to 0}{=} o\,(x^n)$ alors $u = o\,(x^m)$.
2. Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, alors $x^m o\,(x^n) \underset{x\to 0}{=} o\,(x^{n+m})$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (y compris 0), on a $o\,(x^n) \underset{x\to 0}{\to} 0$.

II Equivalence

II.1 Définition

Définition II.1

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux fonctions de $\mathscr{F}\,(I, \mathbb{K})$.

- *Suites :* On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes**, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ s'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que
  1. $\varepsilon_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$
  2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 + \varepsilon_n)\, v_n = v_n + \varepsilon_n\, v_n$.
- *Fonctions :* On dit que les fonctions f et g sont **équivalentes** en a, noté $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ s'il existe une fonction $\varepsilon : I \to \mathbb{K}$ telle que
  1. $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\to} 0$
  2. $\forall x \in I$, $f(x) = (1 + \varepsilon(x))\, g(x) = g(x) + \varepsilon(x) g(x)$.

Définition II.2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang et que la fonction g ne s'annule pas sur I.

1. *Suites :* On dit que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **équivalentes**, noté $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ si
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1.$$
2. *Fonctions :* On dit que les fonctions f et g sont **équivalentes** en a, noté $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ si
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarque 5 : Seule la suite/fonction nulle est équivalente à la suite/fonction nulle. Il est INTERDIT d'écrire $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 0$ si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas la suite constante égale à 0 et INTERDIT d'écrire $f(x) \underset{x\to a}{\sim} 0$ si f n'est pas la fonction nulle.

Exemple 6 :

1. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{n}$,
2. $3^n + 2^n \sim_{+\infty} 3^n$,
3. $x^2 + x + 5 \sim_{+\infty} x^2$,
4. $x + x^2 \sim_0 x$

II.2 Propriétés

Proposition II.3

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

1. $\sim$ est réflexive : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.
2. $\sim$ est transitive : $\left[u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n\right] \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.
3. $\sim$ est symétrique : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \quad \Leftrightarrow \quad v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

De même, $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

Proposition II.4

- *Suites :* les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes si et seulement si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou encore si et seulement si $v_n - u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(u_n)$.
- *Fonctions :* les fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a si et seulement si $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou encore si et seulement si $g(x) - f(x) \underset{x\to a}{=} o(f(x))$.

Remarque 7 :

- Attention $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ n'implique pas a priori que $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$! Par exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sqrt{n}$ et $v_n = \sqrt{n} + \ln(n)$.
- La réciproque est aussi FAUSSE : si $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ cela n'implique pas que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$. Par exemple : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

Interprétation : La notion de suites (respectivement fonctions) équivalentes exprime donc le fait qu'au voisinage $+\infty$ (au voisinage de a), l'écart relatif entre les termes u_n et v_n (i.e $\frac{u_n - v_n}{v_n}$) tend vers 0, (respectivement $\frac{f(x)-g(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\to} 0$). Intuitivement les deux suites (respectivement fonctions) ont alors la même « vitesse de convergence » en $+\infty$ (respectivement au voisinage de a). Attention, avoir le même comportement ne signifie pas nécessairement avoir le même graphe ni même des graphes qui se rapprochent.

Proposition II.5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$, I un voisinage de a et f et g deux éléments de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

1. *Suites :*
   (a) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature au voisinage de $+\infty$ i.e. si l'une converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$, l'autre aussi. Si l'une diverge, l'autre aussi.
   (b) Pour $l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$: $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} l$ si et seulement si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l$.
   (c) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont à partir d'un certain rang le même signe.
2. *Fonctions :*
   (a) Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors les fonctions f et g ont le même comportement au voisinage de a : si l'une converge vers l l'autre aussi, Si l'une diverge l'autre aussi.
   (b) Pour $l \in \mathbb{R}$ avec $l \neq 0$: $f(x) \underset{x\to a}{\to} l$ si et seulement si $f \underset{x\to a}{\sim} l$.
   (c) Si $f \underset{x\to a}{\sim} g$ alors les fonctions f et g ont le même signe au voisinage de a.

Remarque 8 : Attention, l'assertion suivante est FAUSSE en général :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n \qquad \Rightarrow \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$.

II.3 Manipulation des équivalents

Proposition II.6 (Produits, puissances et inverse)

1. **Produit :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$ alors $u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n$
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $h(x) \underset{x\to a}{\sim} l(x)$ alors $f(x)h(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)l(x)$.
2. **Produit par un scalaire non nul :** soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $\lambda u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda v_n$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $\lambda f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda g(x)$.
3. **Puissances :** soit $\alpha \in \mathbb{R}$
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n > 0$ à partir d'un certain rang alors $u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g$ et si f est strictement positive au voisinage de a alors $f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$.
4. **Passage à l'inverse :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et si $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang alors $\frac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{v_n}$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si f ne s'annule pas au voisinage de a alors $\frac{1}{f(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{1}{g(x)}$.
5. **Passage à la valeur absolue :**
   (a) *Suites :* si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ alors $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |v_n|$.
   (b) *Fonctions :* si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors $|f(x)| \underset{x\to a}{\sim} |g(x)|$.

Proposition II.7 (Elimination des termes négligeables)

- *Suites :* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + w_n$ et si $w_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
- *Fonctions :* si $f = g + h$ sur I et $h(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$

Anti-Proposition II.8

1. **La somme.** L'assertion $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n \quad\Rightarrow\quad u_n+w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n+t_n$ est **FAUSSE** en général (de même pour les fonctions). Par exemple, $n+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $3-n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-n$ mais $4=(n+1)+(3-n)$ n'est pas équivalent à $n+(1-n)=1$.
2. **La composition à gauche.** L'assertion $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad\Rightarrow\quad \varphi(f(x)) \underset{x\to a}{\sim} \varphi(g(x))$ est **FAUSSE** en général (de même pour les suites). Par exemple, $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x+\ln(x)$ mais e^x n'est pas équivalent en $+\infty$ à $\mathrm{e}^{x+\ln(x)}=x\,\mathrm{e}^x$.

II.4 Equivalents usuels

Soient $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^n$ avec $a_n\neq 0$, $(b_p,\dots,b_n)\in\mathbb{K}^{n-p+1}$ avec $b_p\neq 0$ et $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a_k x^k \underset{x\to0}{\sim} a_p x^p$		$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to+\infty}{\sim} a_n x^n$
$\mathrm{e}^x-1 \underset{x\to0}{\sim} x$		$\ln(1+x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$(1+x)^\alpha-1 \underset{x\to0}{\sim} \alpha x$		$\tan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\cos(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$		$\sin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\mathrm{ch}(x)-1 \underset{x\to0}{\sim} \frac{x^2}{2}$		$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to0}{\sim} x$
$\arcsin(x) \underset{x\to0}{\sim} x$		$\arctan(x) \underset{x\to0}{\sim} x$

Remarque 9 : On a également en $+\infty$: $\mathrm{ch}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \mathrm{sh}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\mathrm{e}^x}{2}$ et $\arctan(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$.

Exemple 10 : Déterminer un équivalent (le plus simple possible), de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné par

1. $u_n=\frac{n^2-2\ln(n)+3}{n-1}$
2. $u_n=\sin\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$
3. $u_n=\ln\left(1+\sin\frac{1}{n}\right)$

III Développements limités

III.1 Définition

Définition III.1

Soient I un voisinage de 0 et $f:I\to\mathbb{R}$. On dit que f admet **un développement d'ordre** n en 0, s'il existe $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\varepsilon_n:I\to\mathbb{R}$ tels que

$$\forall x\in I,\quad f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k+\varepsilon_n(x)x^n \qquad\text{et}\qquad \lim_{x\to0}\varepsilon_n(x)=0.$$

Le polynôme $x\mapsto\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est alors appelé **la partie régulière** du développement limité.

Remarque 11 :

1. Cela signifie qu'au voisinage de 0, la fonction f « se comporte comme » la fonction polynomiale $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ou encore que la fonction $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ constitue la meilleure approximation à l'ordre n de la fonction f. Plus l'ordre est important, meilleure sera l'approximation.
2. Naturellement cette approximation n'est valide a priori qu'au voisinage immédiat de 0 et ne présume rien de la fonction dès que l'on s'éloigne un peu de 0.

Proposition III.2

Soient I un voisinage de 0 et $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0 si et seulement s'il existe $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

Démonstration. Si $\forall x \in I,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon_n(x) x^n$ alors

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k}{x^n} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \varepsilon_n(x) = 0$$

et donc $\forall x \in I,\ f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ ou encore $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$.
Réciproquement, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, alors $f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ et par définition du o, il existe $\varepsilon_n : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$ et

$$\forall x \in I, \quad f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \varepsilon_n(x) x^n.$$

et donc $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \varepsilon_n(x) x^n$.

□

Exemple 12 :

1. Un polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre. Exemple $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 6$ on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} -6 + 2x^2 + o\left(x^2\right)$ ou encore $f(x) \underset{x\to 0}{=} -6 + 2x^2 + 5x^3 + o\left(x^{27}\right)$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

   Démonstration. Soit $x \in]-1;1[$, on sait que
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

   c'est-à-dire
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

   Or
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{x}{1-x} = 0.$$

   Par conséquent, $\frac{x^{n+1}}{1-x} \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ et donc
$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

   □

3. En prenant $-x$ dans l'exemple précédent, on obtient également pour tout $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

Définition III.3

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, I un voisinage de x_0 et f une fonction définie sur I. Alors la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ est définie sur $J = \{ h \in \mathbb{R} \mid h + x_0 \in I \}$, un voisinage de 0. On dit que f admet un développement limité d'ordre n en x_0 si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0, c'est-à-dire s'il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que

$$f(x_0+h) \underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + o(h^n).$$

En posant $x = x_0 + h$, cette relation s'écrit aussi

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

Remarque 13 : Pour calculer un développement limité en x_0, on peut toujours se ramener en 0. Les résultats du cours sont donc énoncés en 0 et on peut (sauf mention contraire) les adapter en x_0.

Exemple 14 : Donner le développement limité à l'ordre 3 en $x_0 = 2$ de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$.

III.2 Premières propriétés

Proposition III.4 (Unicité)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction définie au voisinage de 0. Supposons qu'il existe I un voisinage de 0 et des réels $a_0, \dots, a_n$ et $b_0, \dots, b_n$ tels que

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)$$

alors on a pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = b_k$.

Démonstration. Procédons par l'absurde et supposons que $(a_0, \dots, a_n) \neq (b_0, \dots, b_n)$. Soit r le premier indice entre 0 et n tel que $a_r \neq b_r$. On obtient alors pour I un voisinage de 0

$$\begin{aligned} & \forall x \in I, \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \\ \Rightarrow \quad & \forall x \in I, \quad a_r x^r + a_{r+1} x^{r+1} + \cdots + a_n x^n + o(x^n) = b_r x^r + b_{r+1} x^{r+1} + \cdots + b_n x^n + o(x^n) \\ \Rightarrow \quad & \forall x \in I \setminus \{0\}, \quad a_r + a_{r+1} x + \cdots + a_n x^{n-r} + o(x^{n-r}) = b_r + b_{r+1} x + \cdots + b_n x^n + o(x^{n-r}) \end{aligned}$$

Donc en soulignant le fait que $n - r \geqslant 0$ et en passant à la limite quand $x \to 0$, on obtient alors que

$$a_r = b_r,$$

ce qui contredit l'hypothèse initiale et achève la démonstration.

□

Proposition III.5 (Troncature)

Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, tel que $m \leqslant n$. Si f admet un développement limité d'ordre n en 0 alors elle admet un développement limité d'ordre m. Plus précisément, si

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$$

est un développement limité d'ordre n de f alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^m)$$

est un développement limité d'ordre m de f.

Démonstration. Soit I un intervalle contenant 0 et f une fonction définie sur I telle que

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m + \underbrace{a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}_{=g(x)}. \end{aligned}$$

De plus on remarque que

$$\frac{g(x)}{x^m} = \frac{a_{m+1}x^{m+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)}{x^m} = a_{m+1}x + \cdots + a_n x^{n-m} + o\left(x^{n-m}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^m\right)$ et on a bien $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{m} a_k x^k + o(x^m)$.

□

Proposition III.6

Attention, ce résultat n'est vrai qu'en 0.
Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de partie régulière $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. Si f est paire alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de x.
2. Si f est impaire alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.

Démonstration. Soit f une fonction paire définie sur un intervalle I centré en 0 (et non réduit à $\{0\}$) ayant un développement limité en 0 d'ordre n : il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Puisque I est centré en 0, pour tout $x \in I$, on a $-x \in I$ et par conséquent, on a également

$$f(-x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o\left((-1)^n x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o\left((-1)^n x^n\right).$$

La fonction f est paire donc $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$. De plus si n est pair, $(-1)^n x^n = x^n$ et si n est impair $o\left((-1)^n x^n\right) = o\left(-x^n\right) = o\left(x^n\right)$ (cf Proposition I.5). Dans tous les cas,

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 - a_1 x + \cdots + (-1)^n a_n x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Donc par unicité du développement limité, on a pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = (-1)^k a_k$. Notamment si $k \in [\![1;n]\!]$ est impair, alors $a_k = -a_k$ et donc $a_k = 0$. Ceci démontre bien le premier point de la proposition. On procède de même pour le cas où f est impaire.

□

Proposition III.7 (DL et continuité ou dérivabilité)

Soit f une fonction définie sur I un voisinage de 0 (éventuellement I est privé de 0).

1. La fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 si et seulement si f est continue en 0 (ou prolongeable par continuité si elle n'est pas définie en 0). Son développement limité est alors donnée par
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + o\left(1\right).$$
2. La fonction f admet un développement limité d'ordre 1 en 0 si et seulement si f est dérivable en 0. Son développement limité est alors donnée par
$$f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o\left(x\right).$$
3. Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur un voisinage de 0 alors f admet un développement d'ordre n en 0.

Démonstration.

1. La fonction f admet un développement d'ordre 0 en 0 si et seulement si
$$\begin{aligned} & \exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + o(1) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) - a_0 \underset{x\to 0}{=} o(1) \\ \Leftrightarrow \quad & \exists a_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x\to 0} f(x) - a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \exists a_0 \in \mathbb{R}, \lim_{x\to 0} f(x) = a_0. \end{aligned}$$
La dernière assertion est la définition de la continuité de f en 0, ce qui démontre le premier point.
2. Si la fonction f admet un développement d'ordre 1 en 0 alors
$$\exists I \text{ un voisinage de } 0,\ \exists a_0, a_1 \in \mathbb{R},\ \forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + o(x).$$
En particulier la fonction f admet un développement limité d'ordre 0 en 0 (cf la Proposition III.5) et d'après le premier point, f est continue en 0 et de plus $f(0) = a_0$. On a alors
$$\forall x \in I, \qquad f(x) - f(0) - a_1 x \underset{x\to 0}{=} o(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall x \in I \setminus \{0\}, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x} - a_1 \underset{x\to 0}{=} o(1).$$
Par conséquent,
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} - a_1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = a_1.$$
Ainsi, on en déduit que la fonction f est dérivable en 0 et de plus $f'(0) = a_1$ et donc son développement limité est
$$\forall x \in I, \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$
Réciproquement, si f est dérivable en 0 alors par définition,
$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = f'(0).$$
Par conséquent, il existe I un voisinage de 0 tel que
$$\forall x \in I, \qquad \frac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{=} f'(0) + o(1)$$
ou encore tel que
$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} f'(0)x + xo(1) + f(0) = f(0) + f'(0)x + o(x).$$
Donc f admet bien un développement limité d'ordre 1 en 0.
3. Admis pour l'instant c'est un corollaire du Théorème de Taylor-Young que nous allons voir un peu plus tard dans le chapitre.

□

Contre-exemple. La réciproque du dernier point est faux en général. Si f admet un développement d'ordre n en 0, la fonction f n'est pas nécessairement de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de 0. Soit
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x + x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$
On a $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc $x \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \underset{x\to 0}{=} o(1)$. Par conséquent,
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} x + x^2 o(1) \underset{x\to 0}{=} x + o\left(x^2\right).$$
Donc f admet un développement limité d'ordre 2 en 0. Cependant la fonction f n'est pas $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En effet, on sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme somme et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$f'(x) = 1 + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) - 2\frac{x^3}{x^3} \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - 2\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right).$$
On remarque que f' n'admet pas de limite en 0 donc f n'est pas $\mathscr{C}^1$ malgré le fait qu'elle possède un développement limité d'ordre 2.
Les fonctions suivantes sont $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 et admettent donc des développements limités de tout ordre. Soit $n \in \mathbb{N}$.

III.3 Développements limités usuels

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right).$$

$$\forall x \in]-\infty;1[, \qquad \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o\left(x^n\right).$$

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}x^k}{k} + o\left(x^n\right).$$

$$\forall x \in]-1;+\infty[, \qquad (1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right).$$

IV Manipulation des développements limités

IV.1 Forme normalisée, somme et produit

Définition IV.1

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I ayant un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0. On note a_p le premier terme non nul du développement limité pour $p \in [\![0;n]\!]$ et alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

On appelle alors **forme normalisée** de f l'écriture

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p \left(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o\left(x^{n-p}\right)\right).$$

Exemple 15 : Pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)\\ &= x\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)\right).\end{aligned}$$

Proposition IV.2 (somme et produit de DL)

Soient f et g deux fonctions ayant un développement limité d'ordre n en 0. Notons P et Q leurs parties régulières (ce sont donc des polynômes d'ordre au plus n) : pour tout $x \in I$, où I est un voisinage de 0,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n).$$

1. La fonction $f+g$ admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+Q(x)+o(x^n).$$

2. La fonction fg admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} R(x)+o(x^n).$$

où R est le polynôme PQ tronqué à l'ordre n.

Démonstration. Supposons que pour tout $x \in I$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o(x^n)$ et que pour tout $x \in I$, $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x)+o(x^n)$.

1. Alors, pour tout $x \in I$,

$$f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o(x^n)+Q(x)+o(x^n) \underset{x\to 0}{=} P(x)+Q(x)+\underbrace{o(x^n)+o(x^n)}_{\ll x^n} \underset{x\to 0}{=} P(x)+Q(x)+o(x^n).$$

2. De plus, le polynôme PQ est de degré inférieur ou égal à $2n$: $PQ = \alpha_0+\alpha_1 X+\cdots+\alpha_{2n}X^{2n}$. Si R est la troncature de ce polynôme à l'ordre n :

$$PQ(X) = R(x)+\alpha_{n+1}X^{n+1}+\cdots+\alpha_{2n}X^{2n}.$$

Alors, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x)+\underbrace{P(x)o(x^n)}_{\ll x^n}+\underbrace{Q(x)o(x^n)}_{\ll x^n}+\underbrace{o(x^n)\,o(x^n)}_{\ll x^n}\\
&\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x)+\underbrace{o(x^n)+o(x^n)+o(x^n)}_{\ll x^n}\\
&\underset{x\to 0}{=} R(x)+\underbrace{\alpha_{n+1}x^{n+1}+\cdots+\alpha_{2n}x^{2n}+o(x^n)}_{\ll x^n}\\
&\underset{x\to 0}{=} R(x)+o(x^n).
\end{aligned}$$

□

Exemple 16 :

1. Calculons un DL$_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1-x} - e^x$. La fonction f est définie sur $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. De plus pour tout $x \in]-\infty;1[$, on a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \left(1+x+x^2+x^3+o(x^3)\right) - \left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2}+\frac{5x^3}{6}+o(x^3).$$

ATTENTION ! Les petits o ne disparaissent pas !

2. Calculons un DL$_3(0)$ de la fonction $g : x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{1+x}}$. La fonction g est définie sur $]-1;+\infty[$ de plus pour tout $x \in]-1;+\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
\cos(x) &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac12-1\right)}{2}x^2+\frac{\left(-\frac12\right)\left(-\frac12-1\right)\left(-\frac12-2\right)}{6}x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{\frac34}{2}x^2-\frac{\frac{3\times5}{2\times2\times2}}{6}x^3+o(x^3)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o(x^3).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout $x \in]-1;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
g(x)=\cos(x)\times\frac{1}{\sqrt{1+x}} &\underset{x\to 0}{=} \left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1 -\tfrac{x}{2} +\tfrac{3}{8}x^2 -\tfrac{5}{16}x^3 +o\left(x^3\right)\\
&\qquad -\tfrac{x^2}{2} +\tfrac{x^3}{4} -\tfrac{x^2}{2}\left(\tfrac{3}{8}x^2-\tfrac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\qquad +o\left(x^3\right)\left(1-\tfrac{x}{2}+\tfrac{3}{8}x^2-\tfrac{5}{16}x^3+o\left(x^3\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Remarque 17 : Lorsque l'on cherche un développement limité d'ordre n d'un produit fg, il n'est pas toujours utile de calculer un développement limité d'ordre n de f et de g (cela peut être long). Il vaut connaître le degré du premier terme non nul de la partie régulière de f et de g par exemple p et q, l'écrire sous forme normalisée :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p \underbrace{(1+\dots)}_{=u(x)} \qquad \text{et} \qquad g(x) \underset{x\to 0}{=} x^q \underbrace{(1+\dots)}_{=v(x)}$$

pour alors anticiper que pour obtenir un développement limité de $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} x^{p+q}u(x)v(x)$ d'ordre n, un développement d'ordre $n-p-q$ de u et de v suffira. Autrement dit un développement limité d'ordre $n-q$ pour f et un développement d'ordre $n-p$ pour g suffiront.

Exemple 18 : Calculons un $DL_6(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \sin^2(x)\ln\left(1+x^2\right)$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ de plus pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $\sin(x)=x\,(1+\dots)$. Nous aurons donc $\sin^2(x)=x^2\,(1+\dots)$. D'autre part, $\ln\left(1+x^2\right)=x^2\,(1+\dots)$. Par conséquent nous aurons $f(x)=x^4\,(1+\dots)$. On voit ainsi que pour obtenir un DL d'ordre 6 pour f, des DL d'ordre 2 seulement suffiront pour les termes notés $(1+\dots)$. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)=x\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
\sin^2(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(\begin{array}{lll} 1 & -\tfrac{x^2}{6} & +o\left(x^2\right)\\ & -\tfrac{x^2}{6} & -\tfrac{x^2}{6}\left(-\tfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\\ & & +o\left(x^2\right)\left(1-\tfrac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)\end{array}\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right).
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $u>-1$,

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+o\left(u^2\right) \underset{u\to 0}{=} u\left(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{3}+o\left(u^2\right)\right).$$

Par conséquent, avec $u=x^2 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (cf la proposition ci-dessous pour la composée de développement limité) on a pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\ln\left(1+x^2\right) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{3}+o\left(x^4\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right).$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^4\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^2\right)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^4\begin{pmatrix} 1 & -\frac{x^2}{2} & +o\left(x^2\right) \\ & -\frac{x^2}{3} & +o\left(x^2\right) \\ & & +o\left(x^2\right)\end{pmatrix}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^4\left(1-\frac{5}{6}x^2+o\left(x^2\right)\right)$$

$$\underset{x\to 0}{=} x^4-\frac{5}{6}x^6+o\left(x^6\right).$$

IV.2 Composée et quotient

Proposition IV.3 (admis)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f et u deux fonctions définies au voisinage de 0. On suppose que

1. la fonction f admet un développement limité d'ordre n en 0,
2. la fonction u admet un développement limité d'ordre n en 0,
3. $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$.

Alors, en notant P la partie régulière de u et Q la partie régulière de f :

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x)+o\left(x^n\right),$$

on obtient que la fonction $f \circ u$ admet également un développement limité d'ordre n en 0 dont la partie régulière R est obtenue en tronquant à l'ordre n le polynôme $Q \circ P$.

Corollaire IV.4 (quotient)

Si f est la fonction définie par $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et si u est une fonction ayant un développement limité d'ordre n en 0 et vérifie $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = 0$, alors $f \circ u$ admet un développement limité d'ordre n en 0 et

$$f \circ u(x) = \frac{1}{1-u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1+u(x)+u^2(x)+\cdots+u^n(x)+o\left(x^n\right),$$

où en développant les puissances de u, on ne gardera que les monômes de degré inférieur ou égal à n.

Exemple 19 : Calculons un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $f : x \mapsto e^{\sin(x)}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. D'une part pour tout $u \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathrm{e}^u \underset{u\to 0}{=} 1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o\left(u^3\right).$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$u(x) = \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right).$$

On note que $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc $u^3(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$ et donc $o\left(u^3(x)\right) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^3\right)$ et $u^3(x) \underset{x\to 0}{=} x^3+o\left(x^3\right)$. De plus,

$$u^2(x) \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^2+o\left(x^3\right).$$

Puisque $\lim_{x\to 0} u(x) = 0$, on a par conséquent,

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin(x)} &\underset{x\to 0}{=} 1 + u(x) + \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^3}{6} + o\left(u(x)^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) + \frac{x^2 + o\left(x^3\right)}{2} + \frac{x^3 + o\left(x^3\right)}{6} + o\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).
\end{aligned}$$

Exemple 20 :

1. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.
2. Donner un $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $\frac{1}{\cos}$.
3. Donner un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.

IV.3 Intégration des développements limités

Lemme IV.5 (admis)

Soient $n \in \mathbb{N}$ et I un voisinage de 0. Soit f une fonction définie et continue sur I telle que pour tout $x \in I$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$. Si F est une primitive de f sur I, alors

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + o\left(x^{n+1}\right).$$

Théorème IV.6 (Intégration des DL)

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0, f une fonction continue sur I admettant un développement limité d'ordre n en 0 :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

Soit F une primitive de f sur I. Alors F admet un développement limité d'ordre $n+1$ en 0 qui est donné par

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Démonstration. Avec les notations du théorème, on pose pour tout $x \in I$,

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Par hypothèse sur f, on observe que $\forall x \in I$, $g(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(x^n\right)$. D'autre part, si F une primitive de f sur I, alors la fonction

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

est une primitive de g. Donc d'après le lemme précédent, on en déduit que $\forall x \in I$, $G(x) \underset{x\to 0}{=} G(0) + o\left(x^n\right)$. Par suite, on a

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} \underset{x\to 0}{=} G(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + o\left(x^n\right).$$

□

Exemple 21 :

1. Retrouver le développement limité en 0 de $x \mapsto \ln(1+x)$.

2. Déterminer le développement limité en 0 de $x \mapsto \arctan(x)$.

Corollaire IV.7

Soient $n \in \mathbb{N}$, I un voisinage de 0 et f une fonction.

1. Si f est $\mathscr{C}^1$ sur I,
2. si f admet un développement limité d'ordre n en 0 donné par

$$\forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right),$$

3. si f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ en 0,

alors le développement limité de f' est donné par

$$\forall x \in I, \quad f'(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} + o\left(x^{n-1}\right).$$

Anti-Proposition IV.8

ATTENTION il est absolument crucial de vérifier dans le corollaire précédent que f' admette un développement limité d'ordre $n-1$. Il n'existe pas de théorème de dérivation des développements limité assurant que si f admet un développement limité alors f' admet un développement limité. Cependant la proposition III.7 assure que si f est de classe $\mathscr{C}^n$ (et en pratique f sera très souvent $\mathscr{C}^\infty$) alors f' est $\mathscr{C}^{n-1}$ et admet un développement limité d'ordre $n-1$ que l'on peut ALORS déterminer à l'aide du corollaire précédent.

Exemple 22 : Déterminer le développement limité d'ordre $2n$ de la fonction cosinus en 0 en dérivant le développement limité d'ordre $2n+1$ du sinus.

IV.4 Formule de Taylor-Young

Théorème IV.9 (Taylor-Young)

Soient I un intervalle, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Remarque 23 :

- Les cas $n=0$ et $n=1$ correspondent à la Proposition III.7.
- La démonstration de ce théorème démontrera le point 3 de la Proposition III.7 que nous avions précédemment admis qui nous dit que toute fonction de classe $\mathscr{C}^n$ admet un DL d'ordre n.
- Par l'unicité d'un développement limité, si $f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$ et si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de x_0 alors nécessairement pour tout $k \in [\![0; n]\!]$, on a $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur n et posons $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n) : \forall f \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R}), \forall x \in I, \quad f(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Initialisation. Si $n=0$ ou même $n=1$, cela correspond aux points 1 et 2 de la Proposition III.7 que nous avons déjà démontrés.
Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $g = f'$ existe sur I et vérifie $g \in \mathscr{C}^n(I, \mathbb{R})$. Donc par hypothèse de récurrence, on a

$$\forall x \in I, \quad g(x) \underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} g^{(k)}(x_0) + o\left((x-x_0)^n\right).$$

Puisque la fonction f est une primitive de g sur I et que g est continue sur I, on en déduit du théorème IV.6 (intégration des DL) que

$$\begin{aligned}
\forall x \in I, \quad f(x) &\underset{x\to x_0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{k!(k+1)} \underbrace{g^{(k)}(x_0)}_{=f^{(k+1)}(x_0)} + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\
&\underset{x\to x_0}{=} f(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\
&\underset{x\to x_0}{=} f(0) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-x_0)^{k}}{k!} f^{k}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right) \\
&\underset{x\to x_0}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(x-x_0)^{k}}{k!} f^{k}(x_0) + o\left((x-x_0)^{n+1}\right),
\end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathscr{P}(n)$ est vraie et le théorème est démontré. □

IV.5 Applications

Exemple 24 : Rechercher un équivalent et/ou une limite.
Déterminer la limite suivante : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \dfrac{x(1+\cos(x)) - 2\tan(x)}{x^3}$.

Exemple 25 : Etude d'une tangente.

1. Donner l'équation de la tangente au graphe de la fonction exp en 1.
2. Déterminer la position de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$ par rapport à sa tangente en 0.

Exemple 26 : Etude d'une asymptote.

1. Etudier les branches infinies de la fonction f définie sur $\mathscr{D} =]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
2. Etudier les branches infinies de la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.