Chapitre XVII : Espaces Vectoriels

Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

I Espaces, sous-espaces

I.1 Définition

Définition I.1

Soit E un ensemble muni

- d'une loi de composition interne $+$: pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y \in E$,
- d'une loi de composition externe $\cdot$: pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$.

On dit que $(E, +, \cdot)$ est $\mathbb{K}$-**un espace vectoriel** s'il vérifie les propriétés suivantes :

1. La loi $+$ admet un élément neutre : il existe $0_E \in E$ tel que pour tout $x \in E$, $0_E + x = x + 0_E = x$.
2. Tout élément de E admet un inverse pour $+$: pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ (noté $-x$) tel que $x + x' = x' + x = 0_E$.
3. La loi $+$ est associative : pour tout $(x, y, z) \in E^3$, $x + (y + z) = (x + y) + z$.
4. La loi $+$ est commutative : pour tout $(x, y) \in E^2$, $x + y = y + x$.
5. Le scalaire $1 \in \mathbb{K}$ est neutre pour la loi $\cdot$: pour tout $x \in E$, $1 \cdot x = x$.
6. La loi $\cdot$ est doublement distributive :
   — pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $(x, y) \in E^2$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
   — pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
7. La loi $\cdot$ vérifie une associativité mixte : pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tout $x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \mu) \cdot x$.

Remarque 1 :

- Les éléments de $\mathbb{K}$ (des réels ou des complexes) sont appelés des **scalaires**.
- Les éléments de E sont appelés des **vecteurs** même si ce ne sont pas des vecteurs au sens géométrique que vous avez appris au lycée, si E est un ensemble de fonctions, les vecteurs sont donc des fonctions. Ils peuvent être aussi des polynômes, des complexes, des matrices etc.

Exemple 2 : classique à connaître.

- $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble des n-uplet $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$, l'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{C}$ peut être vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel mais aussi en tant qu'ensemble de couples de réels comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des suites $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- Pour I un intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition I.2

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors :

1. $\forall x \in E$, $0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E$.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot 0_E = 0_E$.
3. $\forall x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.
4. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E$, $\lambda \cdot x = 0_E \Rightarrow \lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

Démonstration.

1. Soit $x \in E$. On a
$$0_{\mathbb{K}} \cdot x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}) \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x + 0_{\mathbb{K}} \cdot x \qquad \text{par distributivité.}$$
Or tout élément $y \in E$ admet un inverse pour $+$. Donc pour $y = 0_{\mathbb{K}} \cdot x$, il existe $z = -y \in E$ tel que $y + z = 0_E$. Donc en ajoutant z de chaque côté, on obtient
$$0_E = 0_E + 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_{\mathbb{K}} \cdot x \qquad \text{car } 0_E \text{ est neutre pour } +.$$
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque 0_E est neutre pour $+$, $0_E = 0_E + 0_E$. Donc
$$\lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot (0_E + 0_E) = \lambda \cdot 0_E + \lambda \cdot 0_E \qquad \text{par distributivité.}$$
A nouveau $y = \lambda \cdot 0_E$ est inversible dans E, il existe $z \in E$ tel que $z + y = 0_E$ donc en ajoutant z, on obtient
$$0_E = 0_E + \lambda \cdot 0_E = \lambda \cdot 0_E \qquad \text{car } 0_E \text{ est neutre pour } +.$$
3. Il nous faut vérifier que $(-1) \cdot x$ est l'inverse de x pour $+$. On calcule donc
$$\begin{aligned} x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x &= (1-1) \cdot x && \text{par distributivité} \\ &= 0_{\mathbb{K}} \cdot x \\ &= 0_E && \text{d'après le point 1.} \end{aligned}$$
On montre de même que $(-1) \cdot x + x = 0_E$ ou l'on invoque la commutativité de $+$.
4. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$ tel que $\lambda \cdot x = 0_E$. Si $\lambda = 0_{\mathbb{K}}$ alors la proposition est vérifiée. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\frac{1}{\lambda}$ existe (on rappelle que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Donc
$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) &= \left(\frac{1}{\lambda} \lambda\right) \cdot x && \text{par associativité mixte} \\ &= 1 \cdot x = x. \end{aligned}$$
Donc $x = \frac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \frac{1}{\lambda} \cdot 0_E = 0_E$ d'après le point 2.

□

I.2 Sous-espaces vectoriels

Définition I.3

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, u_1, u_2, \dots, u_n \in E$ des vecteurs de E. On dit que x est **une combinaison linéaire** de $u_1, \dots u_n$ s'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$

Exemple 3 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, tout vecteur $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire des vecteurs $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$. En effet :
$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 (1,0,0) + x_2 (0,1,0) + x_3 (0,0,1) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3.$$
2. Tout complexe $z = a + ib \in \mathbb{C}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des complexes 1 et i :
$$z = a \cdot 1 + b \cdot i.$$
3. Tout polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ est combinaison linéaire de 1, X, X^2, ..., X^n.
4. Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la fonction sh est combinaison linéaire de f_1 $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$:
$$\mathrm{sh} = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2.$$

Remarque 4 :

- Attention la décomposition d'un vecteur x comme combinaison linéaire d'autres vecteurs $u_1, \dots, u_n$ n'est pas nécessairement unique. Exemple dans $\mathbb{R}^3$, on pose $x = (1,4,-1)$, $u_1 = (1,2,0)$, $u_2 = (1,0,1)$ et $u_3 = (-1,2,-2)$. Alors on a
$$x = u_1 + u_2 + u_3 = 2u_1 - u_2 + 0u_3.$$
- Il est donc interdit en général d'identifier :
$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k e_k \quad \not\Rightarrow \quad \forall k \in [\![1;n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

Exemple 5 :

1. Montrer que dans $\mathbb{R}^2$, $(2,7)$ est combinaison linéaire des vecteurs $(5,-2)$ et $(1,-3)$.
2. Montrer que dans $\mathbb{R}^3$, $(-1,2,2)$ n'est pas combinaison linéaire des vecteurs $(1,1,0)$, $(-2,1,3)$ et $(1,0,-1)$.
3. Montrer que le polynôme X^2+1 est combinaisons linéaires des polynômes X^2+2X+3, $X+1$.

Définition I.4

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. On dit que F est **un sous-espace vectoriel** de E si et seulement si F vérifie les deux propositions suivantes.

1. $F \subseteq E$,
2. F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque 6 : Du fait que l'on sache que E est un espace vectoriel, si $F \subseteq E$ la plupart des bonnes propriétés de $+$ et $\cdot$ se transmette automatiquement de E à F. Pour vérifier que F est un sous-espace vectoriel, nous utiliserons donc toujours la caractérisation bien plus efficace suivante.

Proposition I.5 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un ensemble. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si F vérifie les trois propositions suivantes :

1. $F \subseteq E$
2. $0_E \in F$
3. F est stable par combinaison linéaire :
$$\forall\, (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \forall (x,y) \in F^2, \qquad \lambda\, x + \mu y \in F.$$

Remarque 7 : Le point 2, peut être remplacé par $F \neq \emptyset$. Si F est non vide et stable par combinaison linéaire alors il existe $x \in F$ et par stabilité, $x - x = 0_E$ est aussi dans F. Réciproquement si 0_E alors F est non vide.

Exemple 8 :

1. Montrer que $D = \left\{ (x,x,x) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Plus généralement, toute droite du plan respectivement de l'espace **passant par l'origine** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ respectivement $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $P = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
   Plus généralement, tout plan de l'espace **passant par l'origine** est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
3. Justifier que $\mathscr{P} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x+y-z+1=0 \right\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
4. Soit $H = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 0 \}$ et $H' = \{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 1 \}$. Dire si H et H' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exemple 9 : A connaitre.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}_[X]$.
2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions continues $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.
4. L'ensemble des solutions d'un système **homogène** de p équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

5. L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire **homogène** d'ordre 1 (respectivement 2) est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions dérivables (respectivement deux fois dérivables) lui-même étant un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions.

Remarque 10 : La liste est non exhaustive. On a également,

- L'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des suites géométriques réelles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- ...

I.3 Sous-espaces vectoriels engendrés

Définition I.6

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ des vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $u_1, \dots, u_n$, noté $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$, l'ensemble défini par

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \{ \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \in E \mid (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \}.$$

Remarque 11 : L'ensemble $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ correspond à l'ensemble des vecteurs de E que l'on peut obtenir en faisant des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$. Notamment pour tout $k \in [\![1; n]\!]$,

$$u_k = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + 1 \cdot u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n$$

et donc $u_k \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
La définition précédente sous-entend que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. Par bonheur, c'est ce que précise la proposition suivante.

Proposition I.7

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ des vecteurs de E. Alors,

1. $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Mieux : $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $u_1, \dots, u_n$.

Démonstration.

1. On pose $F = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
   - Par définition, si $x \in F$, alors il est combinaison linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$:
   $$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \qquad x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k.$$
   Or E est un espace vectoriel contenant les vecteurs u_k et est donc stable par combinaison linéaire : $x \in E$. Donc on a bien par définition de F :
   $$F \subseteq E.$$
   - Pour $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, on a $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k = 0_E$. En d'autres termes 0_E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ donc
   $$0_E \in F \qquad \text{i.e.} \qquad F \neq \emptyset.$$
   - Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(x, y) \in F^2$. Par définition de F, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que
   $$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k \qquad \text{et} \qquad y = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k.$$
   Par conséquent,
   $$\lambda x + \mu y = \lambda \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k + \mu \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda \lambda_k + \mu \mu_k)}_{\in \mathbb{K}} u_k.$$
   On a donc montré que $\lambda x + \mu y$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $u_1, \dots, u_n$ et par conséquent $\lambda x + \mu y \in F$.

Conclusion : $F = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. On veut montrer $F = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$. On pose G un sous-espace vectoriel de E contenant $u_1, \ldots, u_n$ et on veut montrer que nécessairement G contient F tout entier (et sera donc « plus gros »). Montrons que $F \subseteq G$.
   Soit $x \in F$, par définition, il existe $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que
   $$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k.$$
   Par hypothèse tous les u_k appartiennent à G et G est un sous-espace vectoriel de E donc G est stable par combinaison linéaire (par récurrence si la combinaison linéaire de deux vecteurs de G appartient à G alors toute combinaison linéaire de n vecteurs de G appartient encore à G) :
   $$x = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \underbrace{\lambda_k \underbrace{u_k}_{\in G}}_{\in G}}_{\in G}.$$
   Donc tout élément de F appartient à G et donc $F \subseteq G$.

□

Exemple 12 :

1. Si $u \in E$, $\text{Vect}(u) = \{\,\lambda\, u \in E \mid \lambda \in \mathbb{K}\,\}$ est appelé une **droite vectorielle** de E.
2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, si $a : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I et si A est une primitive de a sur I alors $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sur I est
   $$\mathscr{S}_0 = \text{Vect}\begin{pmatrix} I & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \mathrm{e}^{-A(x)} \end{pmatrix}.$$
3. L'ensemble $\mathscr{S}$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\Delta = a^2 + 4b > 0$, alors en notant r_1 et r_2 les deux racines de $r^2 - ar - b = 0$, on a
   $$\mathscr{S} = \text{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$
4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X] = \text{Vect}\left(1, X, X^2, \ldots, X^n\right)$.

Proposition I.8

Soient E un espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$. Le sous-espace vectoriel $F = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ reste identique si

1. on permute deux vecteurs : $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_n) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_n)$,
2. on multiplie un vecteur par un scalaire non nul : $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, \lambda\, u_i, \ldots, u_n)$,
3. on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs :
   $$\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_n) = \text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_i + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n} \lambda_k\, u_k, \ldots, u_n\right).$$

Remarque 13 :

1. On reconnait les opérations élémentaires !
2. Si un des vecteurs est nul, on peut l'ôter : $\text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n, 0_E) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$.
3. Si l'un des vecteurs est combinaison linéaires des autres vecteurs, on peut l'ôter :
   $$\text{Vect}\left(u_1, \ldots, u_n, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right) = \text{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n).$$

Remarque 14 : On peut étendre la définition d'espace vectoriel engendré : soit A une partie (quelconque) de E un espace vectoriel. On pose

$$\mathrm{Vect}\,(A) = \left\{ x \in E \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \exists\,(x_1, \ldots, x_n) \in A^n,\ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, x_k. \right\}.$$

On a alors toujours le résultat suivant : $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A.

II Intersection, somme, supplémentaire

II.1 Intersection

Proposition II.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E alors $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Si I est un ensemble non vide et $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Montrons que $H = F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

- L'ensemble H est inclus dans E : soit $x \in H$ alors par exemple $x \in F$. Or F est un sous-espace vectoriel de E. Donc $F \subseteq E$ et donc $x \in E$. Ainsi, $H \subseteq E$.
- Puisque F est un sous-espace vectoriel, $0_E \in F$ et de même G est un sous-espace vectoriel, donc $0_E \in G$. Par suite, $0_E \in H$ (et donc $H \neq \emptyset$).
- Soient $(x, y) \in H^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Puisque $x \in H = F \cap G$, $x \in F$ et de même $y \in H$ implique que $y \in F$. Or F est un sous-espace vectoriel donc $\lambda\, x + \mu y \in F$. De même $x \in H$ et $y \in H$ implique que $x \in G$ et $y \in G$. Or G est aussi un sous-espace vectoriel donc $\lambda\, x + \mu y \in G$. Ainsi on en déduit que $\lambda\, x + \mu y \in F \cap G = H$. L'ensemble H est donc stable par combinaison linéaire.

Conclusion, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. Le second point présente les mêmes idées et est laissé en exercice.

□

Exemple 15 :

1. Dans $\mathbb{R}^3$, soit $P = \mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3))$ et $P' = \mathrm{Vect}((-1,0,1),(0,2,1))$. Justifier que P et P' sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $P \cap P'$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$, soit $E = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x + y + z + t = 0 \right\}$ et $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x - y + z - t = 0 \right\}$. Montrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ et déterminer $E \cap F$.
3. Dans $\mathbb{K}[X]$, soit $F = \mathbb{K}_3[X]$ et $G = \{ P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 0 \}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}[X]$ et déterminer $F \cap G$.

II.2 Somme d'espaces

Définition II.2

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme de** F **et** G, noté $F + G$ l'ensemble défini par

$$F + G = \{ z \in E \mid \exists x \in F,\ \exists y \in G,\ z = x + y \}.$$

Proposition II.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. L'ensemble $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration.

- Pour tout $z \in F+G$, il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$. Or par inclusion de F et G dans E, $x \in E$ et $y \in E$ donc $z = x+y \in E$. On a donc bien vérifié que $F+G \subseteq E$.
- Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $0_E \in F$ et $0_E \in G$ donc $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G$.

  Notamment $F+G \neq \emptyset$.
- Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(z,z') \in (F+G)^2$. Par définition, il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$ et de même il existe $(x',y') \in F \times G$ tel que $z' = x'+y'$. Donc

$$\lambda\, z + \mu z' = \lambda\,(x+y) + \mu\,(x'+y') = \lambda\, x + \mu x' + \lambda\, y + \mu y'.$$

  Puisque F est sous-espace vectoriel de E, $\lambda\, x + \mu x' \in F$. De même puisque G est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda\, y + \mu y' \in G$. Donc a bien écrit $z'' = \lambda\, z + \mu z'$ comme la somme d'un élément $x'' = \lambda\, x + \mu x'$ de F et d'un élément $y'' = \lambda\, y + \mu y'$ de G. Conclusion : $\lambda\, z + \mu z' \in F+G$.

Par conséquent, l'ensemble $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Exemple 16 :

1. Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E. Déterminer $F + \{0_E\}$, $F+E$ et $F+F$.
2. On pose $F = \left\{ (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1+x_2+x_3 = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect}\,((1,1,1))$. Montrer que $F+G = \mathbb{R}^3$.

Anti-Proposition II.4

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$F+G = F \cup G \qquad \Leftrightarrow \qquad (F \subseteq G \quad \text{OU} \quad G \subseteq F)\,.$$

En particulier, il faut surtout retenir que $F+G \neq F \cup G$. L'ensemble $F \cup G$ **n'est pas** en général un sous-espace vectoriel de E !

Exemple 17 : Dans $\mathbb{R}^2$, si $F = \text{Vect}((1,0))$ et si $G = \text{Vect}((0,1))$ alors $F \cup G$ correspond à l'ensemble des points (x,y) qui sont ou sur l'axe des abscisses ou sur l'axe des ordonnées (ensemble non stable par combinaison linéaire) tandis que $F+G = \mathbb{R}^2$.

Proposition II.5

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Si F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$F+G = \text{Vect}\,(F \cup G)\,.$$

2. Soit $(n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Si $u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_m$ sont des vecteurs de E, alors

$$\text{Vect}\,(u_1,\ldots,u_n) + \text{Vect}\,(v_1,\ldots,v_n) = \text{Vect}\,(u_1,\ldots,u_n,v_1,\ldots,v_m)\,.$$

Démonstration. Démontrons le premier point.

- Montrons que $F+G \subseteq \text{Vect}\,(F \cup G)$. Soit $z \in F+G$, alors il existe $(x,y) \in F \times G$ tel que $z = x+y$. Puisque $x \in F$, alors $x \in F \cup G$ et donc $x \in \text{Vect}\,(F \cup G)$. De même $y \in G \subseteq F \cup G \subseteq \text{Vect}\,(F \cup G)$. Or $\text{Vect}\,(F \cup G)$ est un sous-espace vectoriel de E donc $z = x+y \in \text{Vect}\,(F \cup G)$ ce qui démontre l'inclusion directe.
- Réciproquement, montrons que $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F+G$. Soit $x \in F \cup G$. Si $x \in F$. Alors

$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \in F+G.$$

  De même, si $x \in G$, alors $x = 0_E + x \in F+G$. Dans tous les cas, $x \in F+G$. Donc $F \cup G \subseteq F+G$. Ainsi $F+G$ est un sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$. Or $\text{Vect}\,(F \cup G)$ est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant $F \cup G$. En conséquence, $\text{Vect}\,(F \cup G) \subseteq F+G$.

□

II.3 Espaces en somme directe

Définition II.6

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **en somme directe** si et seulement si tout élément de $F+G$ se décompose de manière **unique** en un élément de F et un élément de G :

$$\forall (x,x') \in F^2,\ \forall (y,y') \in G^2, \qquad x+y = x'+y' \ \Rightarrow (x = x' \quad \text{ET} \quad y=y')\,.$$

On note alors $F \oplus G$.

Proposition II.7

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.

Démonstration.

- Supposons que F et G soient en somme directe. Soit $x \in F \cap G$. Alors $x \in F$ et $x \in G$ donc x admet les deux décompositions suivantes
$$x = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{x}_{\in G} \in F \oplus G.$$
Par unicité de la décomposition, on en déduit que $x = 0_E$ et $0_E = x$ donc $x \in \{0_E\}$ et donc $F \cap G \subseteq \{0_E\}$. Bien entendu $\{0_E\} \subseteq F \cap G$ (car $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel car F et G sont des sous-espaces vectoriels). Par conséquent, $F \cap G = \{0_E\}$.
- On suppose maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$ et montrons que F et G sont en somme directe. Soient $(x,x') \in F^2$ et $(y,y') \in G^2$ tels que
$$x+y = x'+y'.$$
Alors le vecteur $z = x - x' = y' - y$ est à la fois un vecteur de F : $z = x - x' \in F$ car x et x' sont des éléments de F et F est un sous-espace vectoriel et à la fois un vecteur de G : $y' - y \in G$ car y' et y sont des éléments de G et G est un sous-espace vectoriel. Dès lors, $z \in F \cap G$ et $F \cap G = \{0_E\}$ par hypothèse. Donc $z = 0_E$ i.e. $x = x'$ et $y = y'$ ce qui achève la démonstration.

□

Exemple 18 :

1. Montrer que $\mathrm{Vect}((1,1,1))$ et $\mathrm{Vect}((1,2,3))$ sont en somme directe.
2. Dans $\mathbb{K}_2[X]$, montrer que $F = \{\, P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(1) = P(2) = 0 \,\}$ et $G = \{\, P \in \mathbb{K}_2[X] \mid P(-1) = 0 \,\}$ sont en somme directe.
3. Dans $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables, montrer que $F = \{\, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \,\}$ et $G = \{\, f \in \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f' = 0 \,\}$ sont en somme directe.

II.4 Espaces supplémentaires

Définition II.8

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **supplémentaires** dans E si et seulement si tout élément de E (et non plus de $F+G$) se décompose de manière **unique** en un élément de F et un élément de G :

$$\forall z \in E,\ \exists! (x,y) \in F \times G, \qquad z = x+y.$$

On note alors $E = F \oplus G$.

Proposition II.9

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les espaces F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si

1. $F + G = E$.
2. $F \cap G = \{0_E\}$

Démonstration.

- Si $F \oplus G = E$, alors tout élément se décompose (de manière unique) comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G donc $E \subseteq F + G$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on en déduit que $E = F + G$. D'autre part, par définition si F et G sont supplémentaires, ils sont notamment en somme directe et par la proposition II.7, on en déduit que $F \cap G = \{0_E\}$.
- Réciproquement si $F + G = E$ et $F \cap G = \{0_E\}$ alors par la proposition II.7, on en déduit que F et G sont en somme directe ce qui garantit l'unicité de l'écriture (si elle existe). L'égalité $E = F+G$ assurant l'existence d'une décomposition, on en déduit que tout élément de E se décompose de manière unique et que donc $E = F \oplus G$.

□

Exemple 19 :

1. Soient $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\}$ et $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \right\}$. Montrer que $F + G = \mathbb{R}^3$ mais que F et G ne sont pas supplémentaires.
2. Montrer que $F = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0 \right\}$ et $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \text{ et } y = z \right\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{I}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications impaires et $\mathscr{P}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des applications paires. Montrer que $\mathscr{I}$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe.
4. Dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, montrer que $\mathbb{R}$ et $i\mathbb{R}$ sont supplémentaires. Par contre, dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel.

III Famille de vecteurs, bases

III.1 Famille génératrice

Définition III.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_n \in E$ des vecteurs de E. On dit que la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est **une famille génératrice** de E si et seulement si

$$\text{Vect}\,(x_1, \dots, x_n) = E.$$

Autrement dit, tout vecteur de E peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_n$.

Exemple 20 :

1. La famille $\left(1, X, X^2\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(1, 0, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, 0, 0, \dots, 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}$ car tout vecteur $(x_1, \dots, x_n)$ s'écrit
$$(x_1, \dots, x_n) = x_1\,(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2\,(0, 1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n\,(0, 0, 0, \dots, 1)\,.$$
3. Montrer que la famille $((1, 2, 3), (3, 1, 2), (2, 3, 1), (1, 1, 1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$.
4. La famille $((1, 2, 0, 1), (0, -1, 1, 1), (1, 1, 1, 1))$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?
5. Soit $G = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } 2x - y + z - t = 0 \right\}$. Déterminer une famille génératrice de G.
6. La famille de polynômes $(P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2, P_3 = 1 + 3X + 5X^2)$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$?

Proposition III.2

Soit $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. La famille $(v_1, \ldots, v_n)$ est génératrice de E si et seulement si les vecteurs u_i peuvent s'obtenir comme combinaison linéaire des vecteurs v_i.

Proposition III.3

Soit $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille génératrice de E. La famille $\mathscr{F}$ reste génératrice si

1. On change l'ordre des vecteurs de la famille : $u_i \leftrightarrow u_j$.
2. On multiplie un vecteur par un scalaire non nul $\lambda \in \mathbb{K}^*$: $u_i \leftarrow \lambda\, u_i$.
3. On ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs : $u_i \leftarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} \lambda_k\, u_k$.
4. On ajoute un vecteur u_{n+1} à la famille : $\mathscr{F}' = (u_1, \ldots, u_n, u_{n+1})$.
5. Plus généralement toute sur-famille d'une famille génératrice est une famille génératrice.
6. On enlève un vecteur u_i mais **uniquement** si celui-ci est une combinaison linéaire des autres vecteurs.

III.2 Famille libre

Définition III.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **libre** ou que les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement indépendants** si et seulement si pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k = 0_E \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0.$$

Exemple 21 :

1. La famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.
2. La famille $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
3. La famille cos et sin est libre dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Proposition III.5

Si $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ est une famille libre de E, alors pour tout $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{K}$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k = \sum_{k=1}^{n} \mu_k u_k \quad \Rightarrow \quad \forall k \in [\![1;n]\!], \quad \lambda_k = \mu_k.$$

Autrement dit tout vecteur de $\mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_n)$ admet l'unicité de sa décomposition en les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$.

Proposition III.6

1. On peut effectuer des opérations élémentaires (permutation, dilatation, transvection) à une famille libre, elle restera libre.
2. On peut enlever un vecteur d'une famille libre, elle restera libre.
3. Plus généralement, toute sous-famille d'une famille libre est libre.
4. La famille (u_1) est libre si et seulement si $u_1 \neq 0_E$.
5. Une famille est libre si et seulement si aucun des vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

III.3 Famille liée

Définition III.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. On dit que la famille $\mathscr{F}$ est **liée** ou les vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ sont **linéairement dépendants** si et seulement si $\mathscr{F}$ n'est pas libre i.e. s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tous nuls (il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$) tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, u_k = 0.$$

Exemple 22 :

1. Toute famille contenant 0_E est liée.
2. Montrer que la famille $x \mapsto \cos(x)$, $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$ est liée dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Remarque 23 : Deux vecteurs linéairement dépendants sont dits colinéaires.

Proposition III.8

1. On peut effectuer des opérations élémentaires (permutation, dilatation, transvection) à une famille liée, elle restera liée.
2. On peut ajouter un vecteur à famille liée, elle restera liée.
3. Plus généralement, toute sur-famille d'une famille liée est liée.
4. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres.

Exemple 24 :

1. Soient $e_1 = (1, 1, 1, 1)$, $e_2 = (-1, 1, -1, 1)$ et $e_3 = (1, 2, 1, 2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^4$. Déterminer si (e_1, e_2, e_3) est libre ou liée.
2. Soient $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 3 + X + 5X^2$ et $P_3 = 2 + X + 3X^2$ et $P_4 = 1 + X^2$ quatre éléments de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer si (P_1, P_2, P_3, P_4) est libre ou liée.

Proposition III.9

Toute famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degrés échelonnés est libre.

IV Bases

Définition IV.1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathscr{B}$ est **une base** de E si et seulement si $\mathscr{B}$ est une famille libre et génératrice de E.

Proposition IV.2

Soient E un espace vectoriel et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n) \in E^n$. La famille $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$ i.e. :

$$\forall x \in E, \ \exists! \, (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \, e_k.$$

Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ sont alors appelés les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.

Exemple 25 : BASES CANONIQUES
Dans certains espaces vectoriels, il existe des bases usuelles que l'on appelle bases canoniques.

- $(1, i)$ est la base canonique de $\mathbb{C}$ en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

- $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
- On pose pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $e_i = (0,\dots,0,\underset{\text{position } i}{\underset{\uparrow}{1}},0,\dots,0)$. La famille de vecteurs $(e_1,\dots,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
- $\left(1, X, X^2, \dots, X^n\right)$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.
- Les matrices $E_{11} = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ et $E_{22} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ forme la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Exemple généralisable à $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition IV.3

(base adaptée à la somme) Soient E et F deux sous-espaces vectoriel d'un espace E, $(f_1,\dots,f_p) \in F^p$ une base de F et $(g_1,\dots,g_q) \in G^q$ une base de G. On pose $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_p,g_1,\dots,g_q)$.

1. $F \cap G = \{0_E\}$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est famille libre de E.
2. $F + G = E$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
3. $F \oplus G = E$ si et seulement si $\mathscr{F}$ est une base de E.

Démonstration. On pose $\mathscr{B}_1 = (f_1,\dots,f_p)$ et $\mathscr{B}_2 = (g_1,\dots,g_q)$.

1. Si $F \cap G = \{0_E\}$. Alors on sait que F et G sont en somme directe : $F \oplus G$. Soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p,\mu_1,\dots,\mu_q \in \mathbb{K}$ tels que
$$\underbrace{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k}_{=x} + \underbrace{\sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k}_{y} = 0.$$
Puisque $x \in F$ et $y \in G$ et que $F \oplus G$, on sait que l'écriture est unique donc $x + y = 0_E + 0_E$ implique que $x = 0_E$ et $y = 0_E$ donc
$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k = 0\\ \sum_{k=1}^{p} \mu_k g_k = 0\end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases}\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 & \text{car } \mathscr{B}_1 \text{ est une base (et est donc libre)}\\ \mu_1 = \dots = \mu_p = 0 & \text{car } \mathscr{B}_2 \text{ est une base (et est donc libre)}\end{cases}$$
Donc $\mathscr{F}$ est libre.
2. Soit $z \in E$. Puisque $E = F + G$, on sait qu'il existe $x \in F$ et $y \in G$ tel que $z = x + y$. Puisque $\mathscr{B}_1$ est une base de F, $\mathscr{B}_1$ est une famille génératrice de F : il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que
$$x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k.$$
De la même façon, puisque $\mathscr{B}_2$ est une base de G, il existe $(\mu_1,\dots,\mu_q) \in \mathbb{K}^q$ tel que
$$y = \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k.$$
Donc
$$z = x + y = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f_k + \sum_{k=1}^{q} \mu_k g_k.$$
Ainsi, $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
3. C'est une conséquence des deux points précédents.

□

Remarque 26 : Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \oplus \mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n) = E$.

Exemple 27 : Soient $F = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+y+z+t = x-y+z-t = 0 \right\}$ et $G = \mathrm{Vect}\left((2,0,1,0),(0,1,0,2)\right)$.

1. Montrer que F et G sont supplémentaires.
2. Déterminer une base de E adaptée à cette somme.