Chapitre XXIV : Représentation matricielle des applications linéaires.

Dans ce chapitre nous allons établir un lien très fort entre les applications linéaires de E dans F avec E et F des espaces vectoriels de dimensions p et n respectivement et les matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Ce pont entre les deux chapitres donne aux matrices toute leur importance.
Dans tout ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On pose également pour tout ce chapitre

$$p = \dim(E) \qquad \text{et} \qquad n = \dim(F).$$

I Matrice d'une famille de vecteurs, matrice d'une application linéaire

Rappel (coordonnées d'un vecteur dans une base)

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F. Alors pour tout $u \in F$, il existe un unique n-uplet $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$u = u_1 e_1 + \dots u_n e_n.$$

les scalaires $(u_1, \dots, u_n)$ sont alors appelés les **les coordonnées de u dans la base $\mathscr{B}$**.

Notation. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, en posant pour tout $j \in [\![1;p]\!]$,

$$C_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$$

la colonne j de A, on notera alors

$$A = (C_1, \dots, C_p).$$

Définition I.1

Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de F et $(u_1, \dots, u_p) \in F^p$ une famille de p vecteurs de F. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$ on note $(u_{1,j}, u_{2,j}, \dots u_{n,j}) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$:

$$u_j = u_{1,j}e_1 + u_{2,j}e_2 + \dots + u_{n,j}e_n.$$

On définit alors **la matrice des vecteurs $u_1, \dots, u_p$ dans le base $\mathscr{B}$** par

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p) = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} u_1 & u_2 & \cdots & u_j & \cdots & u_p \end{array} \\ \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \dots & u_{1,j} & \dots & u_{1,p} \\ u_{2,1} & u_{2,2} & \dots & u_{2,j} & \dots & u_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{i,1} & u_{i,2} & \dots & u_{i,j} & \dots & u_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ u_{n,1} & u_{n,2} & \dots & u_{n,j} & \dots & u_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 1 :

- Autrement dit $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p)$ est la matrice dont la colonne j retourne les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$.
- Si pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note C_j le vecteur colonne des coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_p) = (C_1, \dots, C_p).$$

- En particulier, soit $u \in F$. Alors $(u_1, \dots, u_n)$ sont les *coordonnées* de u dans $\mathscr{B}$ (ne pas confondre avec les *vecteurs* de la proposition) si et seulement si

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}.$$

Exemple 2 : Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $u_1 = (1,2,3)$, $u_2 = (-1,0,1)$, $u_3 = (-2,-1,0)$ et $u_4 = (1,1,1)$.

1. Déterminer la matrice de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique $\mathscr{C}$.
2. On pose $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ où $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (1,1,0)$ et $e_3 = (1,1,1)$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice de (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base $\mathscr{B}$.

Définition I.2

Soient $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on note $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{B}_F$. On définit alors **la matrice de f dans les bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$** par

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \begin{array}{c} \\ e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_i \\ \vdots \\ e'_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 3 :

- Avec les notations de la définition, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_1), \dots, f(e_p)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(\mathscr{B}_E)).$$

- Attention à ne pas confondre les lignes et les colonnes. Si n est la dimension de l'espace **d'arrivée** et p est la dimension de l'espace de **départ**, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Notation. Si $E = F$, $\mathscr{B}_E$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E alors la matrice de f dans $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_E$ $(= \mathscr{B}_F)$ est dite plus simplement la matrice de f dans $\mathscr{B}_E$ et est notée

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f).$$

Remarque 4 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme de E et $p = \dim(E)$, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. C'est toujours le cas, si l'on prend deux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}'_E$ distinctes de E (car elles ont bien entendu le même cardinal) : $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}(f) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$.

Exemple 5 : On considère l'application linéaire

$$f \quad : \quad \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y, 2x-y). \end{array}$$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
2. On pose $\mathscr{B}_E = ((1,0),\ (1,1))$ et $\mathscr{B}_F = ((1,0,0),\ (1,1,0),\ (1,1,1))$. Justifier que $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$ sont des bases de $\mathbb{R}^2$ respectivement $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer alors la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_E$ et $\mathscr{B}_F$.

Exemple 6 : Pour $\mathrm{Id}_E : \begin{cases} E & \to E \\ x & \mapsto x \end{cases}$, et $\mathscr{B}$ une base quelconque de E on a :

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n.$$

Pour $0_{\mathscr{L}(E,F)} : \begin{cases} E & \to F \\ x & \mapsto 0_F \end{cases}$, $\mathscr{B}_E$ une base quelconque de E et $\mathscr{B}_F$ une base quelconque de F on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}\left(0_{\mathscr{L}(E,F)}\right) = 0_{n,p}.$$

Remarque 7 : IMPORTANT : sauf l'exemple précédent, la matrice d'une application linéaire dépend des bases choisies. C'est pourquoi la notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ les spécifie. Voir l'exemple 5.

Théorème I.3

Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E et $\mathscr{B}_F$ une base de F. Alors l'application

$$\begin{aligned} \Phi \quad : \quad \mathscr{L}(E,F) &\to \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f &\mapsto \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f), \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Par conséquent $\mathscr{L}(E,F)$ est isomorphe à $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $\mathscr{L}(E,F) \cong \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Démonstration. On fixe toujours E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie respective p et n. Soit $\mathscr{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F.
Linéarité. Montrons que Φ est linéaire. Soient $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}$. On pose

$$\begin{aligned} A &= (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \Phi(f) \\ B &= (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g) = \Phi(g) \\ C &= (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \Phi(\lambda f + \mu g). \end{aligned}$$

Notez que C est bien définie car $\mathscr{L}(E,F)$ étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire et donc $\lambda f + \mu g \in \mathscr{L}(E,F)$. On souhaite alors montrer que $C = \lambda A + \mu B$. Fixons $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \lambda f(e_j) + \mu g(e_j) \qquad \textit{par définition de } \lambda f + \mu g.$$

Or par définition de A, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(f(e_j)) = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$. Autrement dit, $(a_{1,j}, \dots, a_{n,j})$ sont les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}_F = (e'_1, \dots, e'_n)$. D'où,

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

De même, par définition de B,

$$g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} (\lambda f + \mu g)(e_j) &= \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} e'_i && \textit{par définition de } A \textit{ et } B \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}) e'_i && \textit{par linéarité de la somme et de la multiplication externe} \end{aligned}$$

Or, par définition de C on a également

$$(\lambda f + \mu g)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,j} e'_i.$$

Donc **par unicité des coordonnées d'un vecteur** dans la base $\mathscr{B}_F$, on en déduit que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,

$$c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + \mu b_{i,j}.$$

Ceci étant vrai pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, on en déduit bien que

$$C = \lambda A + \mu B \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)\,.$$

Injectivité. Soit $f \in \mathrm{Ker}\,(\Phi)$. Alors, en posant $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$, on a $A = 0_{n,p}$. Donc pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, on a

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_j = \sum_{i=1}^{n} 0_{\mathbb{K}} \times e'_j = 0_F.$$

Donc

$$f(\mathscr{B}_E) = (0_E, \ldots, 0_E) = 0_{\mathscr{L}(E,F)}(\mathscr{B}_E)\,.$$

L'application f est donc nulle sur la base $\mathscr{B}_E$. Or une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Donc

$$f = 0_{\mathscr{L}(E,F)}.$$

Ainsi

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi) \subseteq \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}.$$

L'inclusion réciproque étant assurée par le fait que Ker (Φ) est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E,F)$, on en déduit que

$$\mathrm{Ker}\,(\Phi) = \left\{0_{\mathscr{L}(E,F)}\right\}$$

i.e. Φ est injective.
Surjectivité. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On pose pour tout $j \in [\![1;p]\!]$

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

On obtient une famille $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p) \in F^p$ de p vecteurs de F. Or $p = \dim(E)$ et l'on a vu que dans ce cas il existe une (unique) application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $f(\mathscr{B}_E) = \mathscr{F}$ (proposition II.7, chapitre 19). Pour une telle application f, on a pour tout $j \in [\![1;p]\!]$,

$$f(e_j) = f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i.$$

Par conséquent,

$$\Phi(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = A$$

et donc A possède au moins un antécédent dans $\mathscr{L}(E,F)$ par Φ et Φ est bien surjective i.e. $\mathrm{Im}\,(\Phi) = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Conclusion. Φ est une application linéaire, injective et surjective de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et définit donc un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

$\square$

Corollaire I.4

On garde les notations du théorème I.3.

1. Pour tout $(f,g) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$,
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(\lambda f + \mu g) = \lambda\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) + \mu\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)\,.$$
2. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $f \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que
$$A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,.$$
3. Soient $(f,g)\,\mathscr{L}(E,F)^2$, on a
$$f = g \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(g)\,.$$
4. $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$

Définition I.5

Si E et F admettent des bases canoniques, notées $\mathscr{C}_E$ et $\mathscr{C}_F$ respectivement alors

1. Pour tout $f \in \mathscr{L}(E, F)$ on appelle **matrice canoniquement associée** à f la matrice $\mathrm{mat}_{\mathscr{C}_E,\mathscr{C}_F}(f)$.
2. Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on appelle **application linéaire de $\mathscr{L}(E, F)$ canoniquement associée** à A dans l'unique élément f de $\mathscr{L}(E, F)$ tel que $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_E,\mathscr{C}_F}(f)$.

Remarque 8 : ATTENTION : à une application linéaire $f \in \mathscr{L}(E, F)$ correspond une unique matrice canoniquement associée mais dans le second point l'unicité n'est valide qu'à espaces E et F fixés. Par exemple I_n est la matrice canoniquement associée à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n}$ dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mais est aussi la matrice canoniquement associée à $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ mais cette fois dans $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X], \mathbb{R}_{n-1}[X])$. Lorsque les espaces E et F sont bien fixés alors à chaque matrice correspond canoniquement une unique application linéaire.

Exemple 9 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'application linéaire $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4\right)$ canoniquement associé à A.

II Et la composition devint produit

Proposition II.1 (Vecteur image)

Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $x \in E$ et $y \in F$. On pose

$$X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x), \qquad Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) \qquad \text{et} \qquad A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f).$$

Alors

$$Y = AX \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x) \quad \Leftrightarrow \quad y = f(x).$$

Démonstration. On pose $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e'_1, \ldots, e'_n)$, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ et enfin on note la matrice $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$. On a alors :

$$Y = AX \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1;n]\!], \quad y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

Par unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}_F$,

$$Y = AX \quad \Leftrightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j e'_i = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\right) x_j.$$

Or par définition de A,

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i = f(e_j).$$

Donc

$$\begin{aligned} Y = AX \quad &\Leftrightarrow \quad y = \sum_{j=1}^{p} f(e_j)\, x_j = f\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) && \textit{par linéarité de } f \\ &\Leftrightarrow \quad y = f(x) && \textit{par définition de } X. \end{aligned}$$

De plus par définition, on bien $Y = AX \Leftrightarrow \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F}(y) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(x)$ ce qui conclut la preuve. □

Exemple 10 : On reprend l'exemple 9. Pour tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v \in \mathbb{R}^4$, en posant $U = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ et $V = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}_{\mathbb{R}^4}}(v)$, on a bien

$$v = f(u) = (x + 2z, y - z, x + 2z, 2x - y) \qquad \Leftrightarrow \qquad V = \begin{bmatrix} x + 2z \\ y - z \\ x + 2z \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Exemple 11 : On considère

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \mapsto (x - 2y, y + z). \end{aligned}$$

1. Déterminer la matrice A canoniquement associée à f.
2. Utiliser le calcul matriciel pour déterminer $f(u)$ pour $u = (1, 2, -1)$
3. Justifier que $\mathscr{B}_1 = ((1,0,0), (1,1,0), (1,1,1))$ et $\mathscr{B}_2 = ((0,1), (1,1))$ sont des bases de $\mathbb{R}^3$, respectivement $\mathbb{R}^2$.
4. Déterminer $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2}(f)$ et $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_1}(u)$.
5. En déduire $Y' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2}(f(u))$ et vérifier la cohérence du résultat avec la question 2.

Proposition II.2 (Matrice de la composition)

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F et $\mathscr{B}_G$ une base de G. Considérons enfin $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ et notons $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f)$, $B = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)$ et $C = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f)$. Alors

$$C = BA \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_G}(g \circ f) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F, \mathscr{B}_G}(g)\, \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E, \mathscr{B}_F}(f).$$

Démonstration. Posons $p = \dim(E)$, $n = \dim(F)$, $r = \dim(G)$, $\mathscr{B}_E = (e_1, \ldots, e_p)$, $\mathscr{B}_F = (e_1, \ldots, e'_n)$, $\mathscr{B}_G = (e''_1, \ldots, e''_r)$, $A = (a_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$, $B = (b_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;n]\!]}$, $C = (c_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;p]\!]}$ et enfin on note $C' = (c'_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;r]\!] \times [\![1;p]\!]} = BA$. Fixons $j \in [\![1;p]\!]$. Avec ces notations, on a

$$\begin{aligned} g \circ f(e_j) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e'_i\right) && \textit{par définition de } A \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} g(e'_i) && \textit{par linéarité de } g \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \sum_{k=1}^{r} b_{k,i} e''_k && \textit{par définition de } B \\ &= \sum_{k=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,j}\right) e''_k \\ &= \sum_{k=1}^{r} c'_{k,j} e''_k && \textit{par définition de } C' = BA. \end{aligned}$$

D'autre part, par définition de C, on a

$$g \circ f(e_j) = \sum_{k=1}^{r} c_{k,j} e''_k.$$

Donc par unicité des coordonnées d'un vecteur dans la base $\mathscr{B}_G$, on en déduit que

$$\forall j \in [\![1;p]\!],\ \forall k \in [\![1;r]\!], \quad c'_{k,j} = c_{k,j} \qquad \Leftrightarrow \qquad C = C' = BA.$$

□

Exemple 12 : On pose $f:\begin{cases}\mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^2\\ P & \mapsto (P(0),P(1))\end{cases}$ et $g:\begin{cases}\mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3\\ (x,y) & \mapsto (x+y,x-y,2x+y)\end{cases}$.

1. Déterminer A la matrice canoniquement associée à f, B la matrice canoniquement à g.
2. En déduire la matrice canoniquement associée à $g\circ f$ puis déterminer $g\circ f$.

Corollaire II.3

Soient $f\in\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B}_E$ une base de E. Alors en notant $A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}\left(f^k\right)=A^k=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)^k,$$

où on rappelle que $f^k=\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{ fois}}$ et $f^0=\operatorname{Id}_E$.

Proposition II.4 (Matrice de l'inverse)

On suppose dans cette proposition que $\dim(E)=\dim(F)=n$. Soient $\mathscr{B}_E$ une base de E, $\mathscr{B}_F$ une base de F, $f\in\mathscr{L}(E,F)$ et $A=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$. On a alors

$$f \text{ est un isomorphisme} \quad\Leftrightarrow\quad A \text{ est inversible.}$$

Et dans ce cas, on a

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}\left(f^{-1}\right)=A^{-1}=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)^{-1}.$$

Démonstration. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
f \text{ est un isomorphisme} \quad&\Leftrightarrow\quad \exists g\in\mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} g\circ f=\operatorname{Id}_E\\ f\circ g=\operatorname{Id}_F\end{cases}\\
&\underset{\substack{\text{point 3}\\ \text{prop I.4}}}{\Leftrightarrow}\quad \exists g\in\mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(g\circ f)=I_n\\ \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F}(f\circ g)=I_n\end{cases}\\
&\underset{\text{prop II.2}}{\Leftrightarrow}\quad \exists g\in\mathscr{L}(F,E),\ \begin{cases} \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g)\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) &=I_n\\ \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g) &=I_n\end{cases}\\
&\underset{\substack{\text{point 2}\\ \text{prop I.4}}}{\Leftrightarrow}\quad \exists B\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}),\quad BA=I_n=AB\\
&\Leftrightarrow\quad A \text{ est inversible.}
\end{aligned}$$

De plus à travers ces équivalences, on voit que dans ce cas, $B=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}_E}(g)$ est l'inverse de A. □

Exemple 13 : On considère $f:\begin{cases}\mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^3\\ (x,y,z) & \mapsto (y+z,x+z,x+y)\end{cases}$.

1. Déterminer A la matrice canoniquement associée à f.
2. Démontrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.
3. En déduire que f est un automorphisme et déterminer f^{-1}.

Proposition II.5 (Caractérisation des bases)

Soient $\mathscr{F}=(u_1,\dots,u_p)$ une famille de p vecteurs de E et $\mathscr{B}_E$ une base de E. On a alors l'équivalence suivante

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \quad\Leftrightarrow\quad \operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible.}$$

Démonstration. Puisque $\mathscr{F}$ est une famille de p vecteurs et que $p=\dim(E)$, par la proposition II.7 du chapitre 19, on en déduit qu'il existe une unique application linéaire $f\in\mathscr{L}(E)$ telle que $f(\mathscr{B}_E)=\mathscr{F}$. On constate alors que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F})=\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_E}(f).$$

Ainsi,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) \text{ est inversible.}$$

Donc par la proposition II.4,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est un isomorphisme.}$$

Or par le point 3 de la proposition II.6 du chapitre 19, f est un isomorphisme si et seulement l'image d'une base de E par f est une base de E. Donc dans notre cas, f est un isomorphisme si et seulement si $f(\mathscr{B}_E) = \mathscr{F}$ est une base de E. Conclusion,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(\mathscr{F}) \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{F} \text{ est une base de } E.$$

□

Exemple 14 : Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on considère $P_1 = X^2 + 2X + 1$, $P_2 = X^2 - X + 1$ et $P_3 = -X^2 + X + 1$. Soit $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de $\mathscr{B} = (P_1, P_2, P_3)$ dans $\mathscr{C}$ et en déduire que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

III Changement de base

Définition III.1

Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. On appelle **matrice de passage** de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ la matrice définie par

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E).$$

Remarque 15 : Soit f l'unique endomorphisme de E tel que $f(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. Alors

$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f).$$

Remarque 16 : Faites attention à ne pas vous emmêler dans toutes ces notations. L'ordre des bases est importante. Ecrire $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est intuitif pour dire que l'on exprime $\mathrm{Id}_E(\mathscr{B}')$ dans la base $\mathscr{B}$ mais est contre-intuitif dans l'énoncé $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Exemple 17 : Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Proposition III.2

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ trois bases de E. Alors

1. *(Inverse)* La matrice $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$ est inversible et
$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}.$$
2. *(Composition)* On a
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''} \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles.}$$

Démonstration.

1. C'est une conséquence de la proposition II.5. De plus par la proposition II.4,
$$(P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'})^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\left(\mathrm{Id}_E^{-1}\right) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}$$
2. Par la proposition II.2, on a
$$P_{\mathscr{B},\mathscr{B}''} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'',\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'} P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}.$$

□

Exemple 18 : Déterminer la matrice de passage de $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Proposition III.3

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$. On note $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$. Alors on a

$$X = PX' \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles}$$

Démonstration. Par la proposition II.1, on a

$$PX' = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(x) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(x)) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x) = X.$$

□

Proposition III.4

Soient $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ deux bases de E, $x \in E$ et $(u_1,\dots,u_r) \in E^r$ une famille de vecteurs de E. On a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_r) = P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(u_1,\dots,u_r) \qquad \leftarrow \textit{relation de Chasles}$$

Exemple 19 : A l'aide de cette proposition, déterminer les coordonnées de $u = (x,y,z)$ dans la base $\mathscr{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$.

Proposition III.5 (formule de changement de bases)

Soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E, $\mathscr{B}_F$, $\mathscr{B}'_F$ deux bases de F et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On note $Q = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$ et $P = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)$. Alors

$$\begin{cases} D = P^{-1}AQ \\ A = PDQ^{-1} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f) = P_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f)\,P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E} \end{cases}$$

Remarque 20 : Vous noterez que la relation de Chasles s'est encore fait la malle. Ces propositions sont non-intuitives et donc à bien connaître.

Démonstration. Par la définition des matrices de passage, on a

$$P^{-1}AQ = P_{\mathscr{B}'_F,\mathscr{B}_F}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_F,\mathscr{B}'_F}(\mathrm{Id}_F)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}_F}(f)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}(\mathrm{Id}_E).$$

Par la formule de la composition,

$$P^{-1}AQ = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}'_F}(f) = D.$$

On peut travailler de même pour obtenir $A = PDQ^{-1}$ ou par la formule de l'inverse, puisque P et Q sont des matrices de passage, elles sont inversibles donc

$$A = P\left(P^{-1}AQ\right)Q^{-1} = PDQ^{-1}.$$

□

Corollaire III.6

Soient $\mathscr{B}_E$, $\mathscr{B}'_E$ deux bases de E et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors, en notant $P = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}$, $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)$ et $D = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f)$, on a

$$\begin{cases} D = P^{-1}AP \\ A = PDP^{-1} \end{cases} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{cases} \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f) = P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f)\,P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E} \\ \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_E}(f) = P_{\mathscr{B}_E,\mathscr{B}'_E}\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'_E}(f)\,P_{\mathscr{B}'_E,\mathscr{B}_E} \end{cases}$$

Exemple 21 : Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $f \in \mathscr{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 22 : On considère $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \to \mathbb{R}^2 \\ P & \mapsto (P(0), P(1)) \end{cases}$. On pose $\mathscr{C}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{C}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}_1 = \left(1, 1+X, 1+X+X^2\right)$ et $\mathscr{B}_2 = ((1,-1),(-1,2))$. Déterminer la matrice de f relativement aux bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$.

IV Noyau, image, rang

Définition IV.1

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$, l'application canoniquement associée à A.

1. On appelle **noyau de** A, noté Ker (A), le noyau de f dans $\mathbb{R}^p$.
2. On appelle **image de** A, noté Im (A), l'image de f dans $\mathbb{R}^n$.
3. On appelle **rang de** A, noté rg (A), le rang de f.

Exemple 23 : On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer son noyau, son image et son rang.

Proposition IV.2

Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C_1, C_2, \dots, C_p$ les vecteurs colonnes de A.

1. $\mathrm{Ker}\,(A) = \{ X \in \mathbb{R}^p \mid AX = 0_{\mathbb{R}^n} \}$.
2. $\mathrm{Im}\,(A) = \{ Y \in \mathbb{R}^n \mid \exists X \in \mathbb{R}^p,\ Y = AX \} = \{ AX \in \mathbb{R}^n \mid X \in \mathbb{R}^p \} = \mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_p)$.
3. $\mathrm{rg}\,(A) = \dim\,(\mathrm{Im}\,(A)) = \dim\,(\mathrm{Vect}\,(C_1, \dots, C_p)) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_p)$.

Nous avions vu déjà défini dans le chapitre sur les systèmes linéaires le rang d'une matrice comme étant le nombre de pivots du système linéaire associé. Les deux notions coïncident bien.

Proposition IV.3

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $B \underset{\mathscr{C}}{\sim} A$ alors $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(A)$.
2. Le rang de A est le nombre de pivots de la réduite en colonne de A.

Démonstration.

1. Si $B \underset{\mathscr{C}}{\sim} A$ alors les colonnes $\left(C_1', \dots, C_p'\right)$ de B s'obtiennent à partir de colonnes $(C_1, \dots, C_p)$ de A par des opérations élémentaires. Or on a vu que les opérations élémentaires sur une famille de vecteurs ne change le rang. D'où,
$$\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\left(C_1', \dots, C_p'\right) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_p) = \mathrm{rg}\,(A)\,.$$
2. *Esquisse.* Supposons dans un premier temps que A est une matrice échelonnée en colonne. On note $(C_1, \dots, C_p)$ les vecteurs colonnes de A et r le nombre de pivots de A. Puisque A est échelonnées en colonne, on a $C_{r+1} = \cdots = C_p = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc
$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(C_1, \dots, C_r)\,.$$
Or la matrice A étant échelonnée en colonne, il est facile de voir que $(C_1, \dots, C_r)$ est une famille libre et donc
$$\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{Card}\,(C_1, \dots, C_r) = r.$$
Si A n'est pas échelonnée, elle est équivalente en colonne à une matrice R échelonnée en colonne et par le premier point on obtient alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R) = r$.

□

Proposition IV.4 (admise)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On a
$$\mathrm{rg}\left({}^tA\right) = \mathrm{rg}\,(A)\,.$$

Corollaire IV.5

Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$

1. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si $B \underset{\mathscr{L}}{\sim} A$ alors $\mathrm{rg}\,(B) = \mathrm{rg}\,(A)$.
2. Le rang de A est aussi le nombre de pivots de la réduite de A après échelonnement en ligne.

Proposition IV.6

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $B \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Im}\,(AB) = \mathrm{Im}\,(A)$ et $\mathrm{rg}\,(AB) = \mathrm{rg}\,(A)$.
2. Si $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Ker}\,(BA) = \mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{rg}\,(BA) = \mathrm{rg}\,(A)$.

Démonstration.

1. Soit $Y \in \mathrm{Im}\,(AB)$ alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $Y = (AB)\,X = A\,(BX)$. En posant $Z = BX \in \mathbb{R}^p$, on obtient que $Y = AZ$ et donc $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$. Ainsi $\mathrm{Im}\,(AB) \subseteq \mathrm{Im}\,(A)$.
   Réciproquement si $Y \in \mathrm{Im}\,(A)$, alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $Y = AX$. Puisque B est inversible, B^{-1} existe dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. On pose alors $Z = B^{-1}X \in \mathbb{R}^p$. Ainsi,
   $$Y = AX = ABB^{-1}X = ABZ.$$
   donc $Y \in \mathrm{Im}\,(AB)$ et l'on a $\mathrm{Im}\,(A) \subseteq \mathrm{Im}\,(AB)$.
   Conclusion $\mathrm{Im}\,(AB) = \mathrm{Im}\,(A)$. Il s'en suit immédiatement que
   $$\mathrm{rg}\,(AB) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(AB)\right) = \dim\left(\mathrm{Im}\,(A)\right) = \mathrm{rg}\,(A)\,.$$
2. Soit $X \in \mathrm{Ker}\,(BA)$ alors $BAX = 0_{\mathbb{R}^n}$ en multipliant à gauche par B^{-1} (existe car B inversible), on obtient que
   $$AX = B^{-1}BAX = B^{-1}0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}.$$
   D'où $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Donc $\mathrm{Ker}\,(BA) \subseteq \mathrm{Ker}\,(A)$.
   Réciproquement si $X \in \mathrm{Ker}\,(A)$ alors $AX = 0_{\mathbb{R}^n}$ et donc $BAX = B0_{\mathbb{R}^n} = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $X \in \mathrm{Ker}\,(BA)$ et donc $\mathrm{Ker}\,(A) \subseteq \mathrm{Ker}\,(BA)$.
   Montrons maintenant que $\mathrm{rg}\,(BA) = \mathrm{rg}\,(A)$. On peut passer par les applications linéaires associées et le théorème du rang. Appliquons ici plutôt la transposée. On a
   $$\mathrm{rg}\,(BA) = \mathrm{rg}\left({}^t\!BA\right) = \mathrm{rg}\left({}^t\!A\,{}^t\!B\right).$$
   Or si B est inversible alors ${}^t\!B$ est aussi inversible d'inverse $\left({}^t\!B\right)^{-1} = {}^t\!B^{-1}$. Donc par le point précédent,
   $$\mathrm{rg}\,(BA) = \mathrm{rg}\left({}^t\!A\right)\mathrm{rg}\left({}^t\!B\right) = \mathrm{rg}\,(A)\,\mathrm{rg}\,(B)\,.$$

□

Proposition IV.7

Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

1. Si $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ alors $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(B)$.
2. Si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ alors $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$.

Démonstration.

1. Si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ alors on sait que faire des opérations élémentaires en colonne revient à multiplier à droite par des matrices élémentaires (permutation T_{ij}, dilatation $D_i(\lambda)$, transvection $U_{ij}(\lambda)$) et donc au bilan,
   $$\exists E \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})\,, \qquad A = BE.$$
   Donc d'après la proposition précédente,
   $$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(BE) = \mathrm{Im}\,(B) \qquad \textit{car } E \textit{ est inversible.}$$
2. De la même façon, si $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ il existe $F \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = FB$ et par la proposition précédente,
   $$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(FB) = \mathrm{Ker}\,(F) \qquad \textit{car } F \textit{ est inversible.}$$

□

Remarque 24 : Attention $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$ n'implique pas que $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(B)$ et de même $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ n'implique pas $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(B)$. Exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} B$, pourtant

$$\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) \neq \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\,(B)\,.$$

De la même façon, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} B$ mais

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \neq \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}\,(B)\,.$$

Cependant dans tous les cas, on a toujours $\mathrm{rg}\,(A) = \mathrm{rg}\,(B)$.

Remarque 25 :

- Si R est la réduite en ligne de A, alors $A \underset{\mathscr{L}}{\sim} R$ et donc $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Ker}\,(R)$.
- Si R est la réduite en colonne de A, alors $A \underset{\mathscr{C}}{\sim} R$ et donc $\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Im}\,(R)$.

Exemple 26 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Echelonner A en colonne et en déduire son image.
2. Echelonner B en ligne et en déduire son noyau.

Théorème IV.8 (Théorème du rang version matricielle)

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\mathrm{rg}\,(A) + \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = \dim(\mathrm{Im}\,(A)) + \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = p.$$

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A. Par définition, on a

$$\mathrm{rg}\,(A) + \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f))\,.$$

Or $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie (égale à p) donc par le théorème du rang,

$$\mathrm{rg}\,(A) + \dim(\mathrm{Ker}\,(A)) = \mathrm{rg}\,(f) + \dim(\mathrm{Ker}\,(f)) = p.$$

□

Proposition IV.9

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. A est inversible.
2. $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$
3. $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbb{R}^n$
4. $\mathrm{rg}\,(A) = n$.

Démonstration. EXO !

□

Exemple 27 :

1. Montrer à l'aide du rang que la famille $\mathscr{F} = ((1,1,1), (2,1,0), (-1,0,1))$ n'est pas une base de $\mathbb{R}^3$ puis en extraire une sous-famille libre de cardinal maximal.
2. Montrer à l'aide du rang que la famille $\mathscr{F} = ((1,1), (2,1), (-1,0))$ est génératrice dans $\mathbb{R}^2$ puis en extraire une base.
3. Par une représentation matricielle, déterminer l'image, le noyau et le rang de

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4 \\ & (x,y,z) \mapsto (x+y, y-z, x-y+2z, z+x)\,. \end{aligned}$$