Chapitre XXV : Variables aléatoires.

Dans tout ce chapitre, on note $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini.

I Variables Aléatoires

Définition I.1

On appelle **variable aléatoire réelle** toute fonction X définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$X \quad : \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R} \\ \omega &\mapsto X(\omega). \end{aligned}$$

Remarque 1 :

- L'ensemble $X(\Omega)$ est appelé **l'univers image** de X.
- On peut aussi définir des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble plus abstrait E. Toutes les propositions de ce cours seront énoncés pour plus de simplicité dans le cas réel mais peuvent bien souvent être adaptées à un cadre plus général.

Exemple 2 :

1. On lance de deux distincts et on note X la somme des deux dés. Quelle est l'univers image ?
2. On tire avec remise trois cartes d'un jeu de 52 cartes. On note X le nombre de cartes de coeur obtenues. Quelle est l'univers image ? Même question si le tirage est sans remise.

Notation. Soit $B \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ une partie de $\mathbb{R}$ alors l'ensemble $X^{-1}(B)$ qui est l'image réciproque de B par la fonction f est noté

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\} = \{X \in B\} = (X \in B).$$

En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

- $(X = x) = X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.
- $(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty; x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\}$.
- $(X \geqslant x) = X^{-1}([x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geqslant x\}$.
- $(X < x) = X^{-1}(]-\infty; x[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) < x\}$.
- $(X > x) = X^{-1}(]x; +\infty[) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > x\}$.

Exemple 3 : Soit X le somme de deux dés à six faces. Déterminer $(X = 6)$ puis $(X \geqslant 10)$ et $(X \leqslant 1)$.

Proposition I.2

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Alors la famille d'évènements $(X = x_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles.

Démonstration. Posons pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $A_i = (X = x_i)$. Pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $i \neq j$, on a

$$A_i \cap A_j = (X = x_i) \cap (X = x_j) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x_i = x_j\} = \emptyset.$$

Donc les évènements A_i et A_j sont disjoints et donc notamment incompatibles : $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
Soit $\omega \in \Omega$. Alors $X(\omega) \in X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Donc il existe $i \in [\![1;n]\!]$ tel que $X(\omega) = x_i$. Autrement dit, $\omega \in X^{-1}(\{x_i\}) = (X = x_i) = A_i$. D'où $\Omega \subseteq \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} A_i$. La réciproque étant assurée par la définition des A_i, on en déduit que

$$\Omega = \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} A_i = \bigsqcup_{i \in [\![1;n]\!]} (X = x_i)$$

Ce qui achève de démontrer la proposition. $\square$

Exemple 4 : On note X la somme de deux dés à 4 faces. Déterminer un système complet d'évènements incompatibles.

Corollaire I.3

Pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$, on a
$$\mathbb{P}(X \in A) = \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a).$$

Démonstration. Si $A \subseteq X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, il existe $I \subseteq [\![1;n]\!]$ tel que $A = \{x_i \mid i \in I\} = \bigsqcup_{i \in I} \{x_i\}$. Donc
$$\mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{i \in I}\{x_i\}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I}\left(X^{-1}(x_i)\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{i \in I}(X = x_i)\right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(X = x_i)$$
$$= \sum_{a \in A} \mathbb{P}(X = a).$$

□

Définition I.4

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On appelle **loi de probabilité** de X l'application
$$\mathbb{P}_X \quad : \quad \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0;1]$$
$$A \mapsto \mathbb{P}(X \in A).$$

Proposition I.5

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Sa loi de probabilité $\mathbb{P}_X$ est une probabilité sur $X(\Omega)$.

Démonstration. *Définition.* Soit $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$. Posons $B = X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$. L'ensemble B est bien une partie de Ω. Donc $\mathbb{P}(B)$ est bien défini et à valeur dans $[0;1]$. Il en va donc de même pour $\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(B)$.
Normalisation. Si $A = X(\Omega)$ alors posons $B = X^{-1}(A)$. Par définition, on a $B = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in X(\Omega)\} = \Omega$. Par conséquent,
$$\mathbb{P}_X(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\Omega) = 1 \qquad \textit{car } \mathbb{P} \textit{ est une probabilité sur } \Omega.$$

Additivité. Soit $(A_1, A_2) \in \mathscr{P}(X(\Omega))^2$ tel que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. On pose $B_1 = X^{-1}(A_1)$ et $B_2 = X^{-1}(A_2)$. Montrons que B_1 et B_2 sont disjoints. Soit $\omega \in B_1 \cap B_2$. Alors $\omega \in B_1$ et $\omega \in B_2$. Donc $X(\omega) \in A_1$ et $X(\omega) \in A_2$ donc $X(\omega) \in A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Or $\mathbb{P}$ est une probabilité, donc
$$\mathbb{P}(B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_1)\right) + \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_2)\right) = \mathbb{P}_X(A_1) + \mathbb{P}_X(A_2).$$

D'autre part, l'image réciproque d'une union est l'union des images réciproques. Donc
$$B_1 \sqcup B_1 = X^{-1}(A_1) \sqcup X^{-1}(A_1) = X^{-1}(A_1 \sqcup A_2).$$

Ainsi,
$$\mathbb{P}_X(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}\left(X^{-1}(A_1 \sqcup A_2)\right) = \mathbb{P}(B_1 \sqcup B_2) = \mathbb{P}_X(A_1) + \mathbb{P}_X(A_2).$$

Conclusion, $\mathbb{P}_X$ est bien une probabilité sur l'univers image $X(\Omega)$.

□

Corollaire I.6

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ l'univers image. Alors

1. pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}_X(\{x_i\}) \geqslant 0$,
2. $\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}_X(\{x_i\}) = 1$.

De plus ces deux propriétés déterminent entièrement la probabilité $\mathbb{P}_X$, i.e. la loi de X.

Remarque 5 : Pour déterminer $\mathbb{P}_X$ il suffit donc de connaitre les valeurs de $\mathbb{P}(X = x_i)$ pour tout $i \in [\![1;n]\!]$. On peut donc condenser l'information d'une loi par un tableau ou un diagramme en baton retournant pour chaque abscisse x_i la valeur $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple 6 : Soit X la somme de deux dés équilibrés à quatre faces. Alors

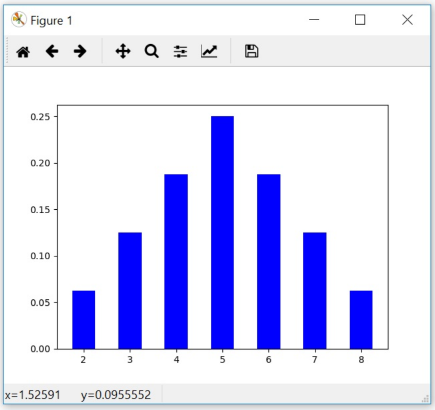
X	2	3	4	5	6	7	8
P_X	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig = plt.figure()

x=[2,3,4,5,6,7,8]
y=[1/16,2/16,3/16,4/16,3/16,2/16,1/16]
width=0.5

plt.bar(x, y, width, color='b' )
plt.show()
```



Définition I.7

Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. On note alors $\varphi(X)$ la variable aléatoire définie par

$$\varphi(X) = \varphi \circ X \quad : \quad \begin{array}{l} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \mapsto \varphi(X(\omega)) \,. \end{array}$$

Remarque 7 : Notamment l'univers image de $\varphi(X)$ est donné par $\varphi(X)(\Omega) = \varphi(X(\Omega))$.

Proposition I.8

Soient X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. On pose $Y = \varphi(X)$. La loi de Y est alors donnée par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)\,.$$

Démonstration. Soit $y \in Y(\Omega)$. Posons

$$A = \{x \in X(\Omega) \mid \varphi(x) = y\} = \varphi^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)\,.$$

On observe que

$$A = \bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \{x\}\,.$$

Il est facile de vérifier que l'union est disjointe. De plus,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(Y^{-1}(\{y\})\right) = \mathbb{P}\left(X^{-1} \circ \varphi^{-1}(\{y\})\right) &= \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(A \sqcup \left(\varphi^{-1}(\{y\}) \cap \overline{X(\Omega)}\right)\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \sqcup X^{-1}\left(\varphi^{-1}(\{y\}) \cap \overline{X(\Omega)}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A) \sqcup \emptyset\right) \\ &= \mathbb{P}\left(X^{-1}(A)\right)\,. \end{aligned}$$

Donc par ce qui précède,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}\left(X^{-1}\left(\bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \{x\}\right)\right) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} X^{-1}(\{x\})\right) &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \mathbb{P}\left(X^{-1}(\{x\})\right) \\ &= \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x) = y}} \mathbb{P}(X = x)\,. \end{aligned}$$

□

Exemple 8 : On lance un dé rouge et un dé vert tous les deux à 4 faces et équilibrés. On note X le résultat du dé rouge moins le résultat du dé vert.

1. Déterminer l'univers image de X et sa loi de probabilité.
2. On pose $Y = |X|$. Déterminer l'univers image de Y et sa loi de probabilité.

II Couples de variables aléatoires

Définition II.1

On appelle **couple de variables aléatoires réelles** sur $(\Omega, \mathbb{P})$ toute application définie par

$$Z \quad : \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R}^2 \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)), \end{aligned}$$

où X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note alors $Z = (X, Y)$.

Remarque 9 :

- L'univers image de Z est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par $Z(\Omega) = \left\{ (X(\omega), Y(\omega)) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \omega \in \Omega \right\}$.
- Z est une variable aléatoire avec $E = \mathbb{R}^2$.

Exemple 10 : On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note X le plus petit résultat des deux dés et Y le plus grand résultat des deux dés. Déterminer l'univers image de Z.

Exemple 11 : Une urne contient 1 boule rouge, 2 boules vertes et 3 boules bleues. On tire simultanément trois boules et on note V le nombre de boules vertes obtenues et B le nombre de boules bleues obtenues. Déterminer l'univers image de $Z = (V, B)$.

Proposition II.2

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$. Alors, la famille

$$((X = x_i) \cap (Y = y_j))_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$$

forme un système complet d'évènements incompatibles.

Démonstration. Posons pour tout $(i, j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, $A_{i,j} = (X = x_i) \cap (Y = y_j)$.
Soient (i, j) et (k, l) deux couples d'indices de $[\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$. On suppose $(i, j) \neq (k, l)$. Premier cas $i \neq k$. Alors $(X = x_i) \cap (X = x_k) = \emptyset$ (cf proposition I.2). Par suite

$$A_{i,j} \cap A_{k,l} = ((X = x_i) \cap (X = x_k)) \cap ((Y = x_j) \cap (Y = x_l)) = \emptyset.$$

On procède de même si $j \neq l$. Donc les évènements $(A_{i,j})_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]}$ sont disjoints et donc incompatibles.
De plus, on a

$$\begin{aligned} \bigsqcup_{(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]} A_{i,j} = \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\bigsqcup_{1 \leqslant j \leqslant p} A_{i,j} \right) &= \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\bigsqcup_{1 \leqslant j \leqslant p} ((X = x_i) \cap (Y = y_j)) \right) \\ &= \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} \left((X = x_i) \cap \left(\bigsqcup_{1 \leqslant j \leqslant p} (Y = y_j) \right) \right) \\ &\underset{\text{prop I.2}}{=} \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} ((X = x_i) \cap \Omega) \\ &= \bigsqcup_{1 \leqslant i \leqslant n} (X = x_i) \\ &= \Omega. \end{aligned}$$

On a donc bien démontré que la famille $(A_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ forme un système complet d'évènements incompatibles.

$\square$

Remarque 12 :

- Il est courant qu'il existe $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$, tel que $(X = x_i) \cap (Y = y_j)$. Dans ce cas, il est possible de réduire l'univers image $Z(\Omega)$ qui sera alors distinct de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, voir l'exemple 10.
- En particulier, on a toujours
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right) = 1.$$

Corollaire II.3

Soit $Z = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Pour tout $A \in X(\Omega)$ et tout $B \in Y(\Omega)$, on a
$$\mathbb{P}(Z \in A \times B) = \mathbb{P}\left((X \in A) \cap (Y \in B)\right) = \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} \mathbb{P}\left((X = a) \cap (Y = b)\right).$$

Définition II.4

Soient $Z = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors la loi $\mathbb{P}_Z = \mathbb{P}_{(X,Y)}$ du couple donnée par
$$\mathbb{P}_{(X,Y)} \quad : \quad \begin{aligned} Z(\Omega) &\to [0;1] \\ (x,y) &\mapsto \mathbb{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \end{aligned}$$
est appelée **la loi conjointe** de X et de Y.

Exemple 13 : On reprend l'exemple 10. La loi du couple est alors donnée par les probabilités suivantes :

$x_i \backslash y_i$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

Définition II.5

Soit $Z = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires réelles de $(\Omega, \mathbb{P})$. On appelle **lois marginales** de Z les lois des variables aléatoires X et Y.

Proposition II.6

Soit $Z = (X,Y)$ un couple de variables aléatoires réelles de $(\Omega, \mathbb{P})$. On suppose que $Z(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_p\}$. Alors les lois marginales de Z sont données par
$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\left(Z = (x_i, y_j)\right) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right)$$
$$\forall j \in [\![1;p]\!], \quad \mathbb{P}(Y = y_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(Z = (x_i, y_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right).$$

Démonstration. Puisque $Z(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\} \times \{y_1, \ldots, y_p\}$, on en déduit que $Y(\Omega) = \{y_1, \ldots, y_p\}$ (éventuellement certains évènements $(Y = y_j)$ sont négligeables). Soit $i \in [\![1;n]\!]$. On a
$$(X = x_i) = (X = x_i) \cap \Omega = (X = x_i) \cap \left(\bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant p} (Y = y_j)\right) = \bigsqcup_{1\leqslant j\leqslant p} \left((X = x_i) \cap (Y = y_j)\right).$$

L'union étant disjointe, on obtient,

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j)).$$

De même pour la loi marginale de Y.

$\square$

Remarque 14 : Si les probabilité de Z sont rangés dans un tableau, il suffit de sommer les lignes ou les colonnes pour obtenir la loi marginale de X ou de Y.

Exemple 15 : On reprend l'exemple 10. On obtient que

$$\sum_{j=1}^{4} \mathbb{P}((X = 2) \cap (Y = j)) = 0 + \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{2}{16} = \frac{5}{16}.$$

Plus généralement, on a

$x_i \backslash y_i$	1	2	3	4	$\mathbb{P}(X = x_i)$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}(Y = y_j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

Anti-Proposition II.7

Attention, la loi conjointe permet de déterminer les lois marginales mais la réciproque est fausse en générale et les lois marginales ne suffisent pas à déterminer entièrement la loi conjointe (qui contient l'information de comment se comporte X connaissant Y ou réciproquement).

Exemple 16 : On vérifie qu'une variable aléatoire $Z' = (X', Y')$ dont la loi est donnée par les probabilités ci-dessous est distincte de la loi de Z de l'exemple 10 et pourtant possède exactement les mêmes lois marginales.

Z'	1	2	3	4	$\mathbb{P}(X' = x_i)$
1	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{7}{16}$
2	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{5}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\mathbb{P}(Y' = y_j)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$	1

Définition II.8

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles.

- Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(Y=y)} \quad : \quad & X(\Omega) \to [0;1] \\ & x \mapsto \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(Y = y)}, \end{aligned}$$

  est appelée la **loi conditionnelle de X sachant** $(Y = y)$.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$. Alors l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{(X=x)} \quad : \quad & Y(\Omega) \to [0;1] \\ & y \mapsto \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))}{\mathbb{P}(X = x)}, \end{aligned}$$

  est appelée la **loi conditionnelle de Y sachant** $(X = x)$.

Remarque 17 : Les lois conditionnelles définissent des probabilités sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement.

Exemple 18 : On reprend l'exemple 10. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $(Y = 3)$.

Remarque 19 : En reprenant les notations de la proposition II.6, si $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $\mathbb{P}(Y = y_i) \neq 0$ et si $\forall j \in [\![1;p]\!]$, $\mathbb{P}(X = x_i) \neq 0$, alors par la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned} \forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(X = x_i) &= \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_i \mid Y = y_j)\, \mathbb{P}(Y = y_j) \\ \forall j \in [\![1;p]\!], \quad \mathbb{P}(Y = y_j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y = y_j \mid X = x_i)\, \mathbb{P}(X = x_i). \end{aligned}$$

Définition II.9

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X et Y sont **indépendantes** si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x)\, \mathbb{P}(Y = y).$$

Remarque 20 :

1. Autrement dit, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_{(X,Y)}(\{x, y\}) = \mathbb{P}_X(\{x\})\, \mathbb{P}_Y(\{y\}).$$

2. Si X et Y sont indépendantes alors la loi conjointe s'obtient à l'aide des lois marginales (mais uniquement dans ce cas).
3. Si X et Y sont indépendantes alors les lois conditionnelles coïncident avec les lois marginales : pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) \neq 0$,

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \mathbb{P}(X = x \mid Y = y) = \mathbb{P}(X = x)$$

   et de même pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$, on a

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad \mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \mathbb{P}(Y = y).$$

Exemple 21 : On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

1. On tire successivement deux boules. On note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la seconde boule. Les variables X et Y sont-elles indépendantes si le tirage est avec remise ?
2. Même question si le tirage est sans remise.

Proposition II.10

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes. Alors pour tout $(A, B) \in \mathscr{P}(X(\Omega)) \times \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants :

$$\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).$$

Démonstration. Par le corollaire II.3, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} \mathbb{P}((X = a) \cap (Y = b)) \\ &= \sum_{a\in A}\sum_{b\in B} \mathbb{P}(X = a)\,\mathbb{P}(Y = b) && \textit{par indépendance} \\ &= \sum_{a\in A} \mathbb{P}(X = a) \sum_{b\in B} \mathbb{P}(Y = b) \\ &= \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B).\end{aligned}$$

□

Proposition II.11

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles indépendantes. Soient $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux variables aléatoires indépendantes.

Démonstration. *Esquisse.* Soit $(x, y) \in f(X(\Omega))$ et $y \in g(Y(\Omega))$. On pose $A = f^{-1}(\{x\}) \cap X(\Omega)$ et $B = g^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)$ alors

$$\mathbb{P}((f(X) = x) \cap (g(Y) = y)) = \mathbb{P}((X \in A) \cap (Y \in B)) = \mathbb{P}(X \in A)\,\mathbb{P}(Y \in B) = \mathbb{P}(f(X) = x)\,\mathbb{P}(g(Y) = y).$$

□

Définition II.12

Soient $Z = (X, Y)$ un couple de variable aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ une application définie sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors on définit $\varphi(Z)$ par

$$\varphi(Z) \quad : \quad \begin{aligned} &\Omega \to \mathbb{R} \\ &\omega \mapsto \varphi(Z)(\omega) = \varphi(Z(\omega)) = \varphi(X(\omega), Y(\omega)).\end{aligned}$$

Notamment si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi(x, y) = x + y$, on obtient $\varphi(Z) = X + Y$.

Proposition II.13 (loi de la somme)

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. La loi de $S = X + Y$ est donnée par

$$\forall z \in S(\Omega), \quad \mathbb{P}(S = s) = \sum_{\substack{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega) \\ s = x+y}} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)).$$

Exemple 22 : On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note X le résultat du premier dé et Y le résultat du second dé. Déterminer la loi de $S = X + Y$.

Définition II.14

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. On définit alors **le vecteur aléatoire** $Z = (X_1, \dots, X_n)$ la variable aléatoire définie par
$$Z \quad : \quad \begin{aligned} \Omega &\to \mathbb{R}^n \\ \omega &\mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)). \end{aligned}$$
2. On appelle loi conjointe de $(X_1, \dots, X_n)$ l'application
$$P_{X_1,\dots,X_n} \quad : \quad \begin{aligned} X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega) &\to [0;1] \\ (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathbb{P}((X_1 = x_i) \cap \dots \cap (X_n = x_n)). \end{aligned}$$
3. Les lois marginales de $(X_1, \dots, X_n)$ sont les lois de X_1, de X_2, ..., de X_n.

Définition II.15

Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont **mutuellement indépendantes** ou simplement **indépendantes** si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants :
$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad \mathbb{P}((X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

Proposition II.16

Soient $X_1, \dots, X_p, X_{p+1}, \dots, X_n$, n variables aléatoires réelles indépendantes sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors

1. Les variables aléatoires $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes.
2. Si $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}$ alors les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_p)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.
3. Si $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ..., $f_{n+p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors les variables aléatoires $f_1(X_1), \dots, f_{n+p}(X_{n+p})$ sont indépendantes.

Exemple 23 : Si X, Y, Z, T sont des variables aléatoires réelles indépendantes alors

1. $X^2 + Y$ et ZT sont indépendantes.
2. $X, 2Y + \mathrm{e}^Z, T^3$ sont indépendantes.

III Espérance, Variance

Définition III.1

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On note $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$. On appelle espérance mathématique de X le réel
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Interprétation. L'espérance de X est la moyenne sur les valeurs x_i prises par X pondérées par la fréquence d'apparition de ces valeurs $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$.

Exemple 24 : On note X le résultat d'un dé équilibré à six faces. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

Proposition III.2

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. Si X et Y ont la même loi alors, $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration. Si $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$ alors $X(\Omega) = Y(\Omega)$ et pour tout $x \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}_Y(\{x\}) = \mathbb{P}(Y = x)$. Par suite,
$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) = \sum_{x \in Y(\Omega)} x\mathbb{P}(Y = x) = \mathbb{E}(Y).$$

□

Théorème III.3 (Théorème de Transfert)

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction réelle. Alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x) \mathbb{P}(X = x).$$

Remarque 25 :

- Une espérance peut-être vue comme l'intégrale. Pour rappel, si $\varphi \in \mathscr{E}([a;b])$, on avait alors $I_{[a;b]}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i)(x_{i+1} - x_i)$. Ici la largeur du rectangle est remplacée par $p_i = \mathbb{P}(X = x_i)$ le poids associé à x_i et la hauteur du rectangle reste la valeur de $\varphi(x_i)$.
- Cette proposition est intuitive mais c'est bien un théorème et non la définition de $\mathbb{E}(\varphi(X))$.

Démonstration. Soit $Y = \varphi(X)$. Alors par définition de l'intégrale,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \mathbb{E}(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(\varphi(X) = y).$$

Donc par la proposition I.8,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(\varphi(X)) &= \sum_{y \in Y(\Omega)} y \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \varphi(x)=y}} \mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{\substack{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \varphi(x)=y}} y\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \varphi(x)=y}} \varphi(x)\mathbb{P}(X = x) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} \left(\varphi(x)\mathbb{P}(X = x) \sum_{\substack{y \in Y(\Omega) \\ \varphi(x)=y}} 1 \right).
\end{aligned}$$

Or à x fixé il existe un unique y tel que $\varphi(x) = y$. Donc $\sum_{y \in Y(\Omega), \varphi(x)=y} 1 = 1$. Conclusion,

$$\mathbb{E}(\varphi(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \varphi(x)\mathbb{P}(X = x).$$

□

Exemple 26 : On reprend l'exemple 8. On lance un dé rouge et un dé vert tous les deux à 4 faces et équilibrés. On note X le résultat du dé rouge moins le résultat du dé vert et $Y = |X|$. Calculer l'espérance de Y.

Théorème III.4 (théorème de transfert pour deux variables aléatoires

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Alors

$$\mathbb{E}(\varphi(X, Y)) = \sum_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)} \varphi(x, y) \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)).$$

Proposition III.5

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$.

1. *Linéarité.* Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$.
2. *Positivité.* Si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant 0$, autrement dit si $X(\Omega) \subseteq \mathbb{R}_+$, alors $\mathbb{E}(X) \geqslant 0$.
3. *Croissance.* Si pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$ alors $\mathbb{E}(X) \geqslant \mathbb{E}(Y)$.
4. *Inégalité triangulaire.* On a $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$.

Démonstration.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Par le théorème de transfert,
$$\mathbb{E}(aX+bY)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}(ax+by)\,\mathbb{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right).$$
Donc
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX+bY)&=\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)}(ax+by)\,\mathbb{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right)\\&=\sum_{x\in X(\Omega)}\left(ax\sum_{y\in Y(\Omega)}\mathbb{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right)+\sum_{y\in Y(\Omega)}by\mathbb{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right)\right)\\&\underset{\text{prop II.6}}{=}\sum_{x\in X(\Omega)}ax\mathbb{P}(X=x)+\sum_{y\in Y(\Omega)}by\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}\left((X=x)\cap(Y=y)\right)\\&\underset{\text{prop II.6}}{=}a\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbb{P}(X=x)+b\sum_{y\in Y(\Omega)}y\mathbb{P}(Y=y)\\&=a\mathbb{E}(X)+b\mathbb{E}(Y).\end{aligned}$$
2. Si $X\geqslant 0$, alors pour tout $x\in X(\Omega)$, on a $x\geqslant 0$. Donc
$$\mathbb{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)}\underbrace{x}_{\geqslant 0}\underbrace{\mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant 0}\geqslant 0.$$
3. Si $X\geqslant Y$, alors $X-Y\geqslant 0$. Donc par le point 2, $\mathbb{E}(X-Y)\geqslant 0$. Ainsi, par le point 1, $\mathbb{E}(X)-\mathbb{E}(Y)\geqslant 0$ i.e. $\mathbb{E}(X)\geqslant\mathbb{E}(Y)$.
4. Par l'inégalité triangulaire sur une somme finie, on a d'une part,
$$|\mathbb{E}(X)|=\left|\sum_{x\in X(\Omega)}x\mathbb{P}(X=x)\right|\leqslant\sum_{x\in X(\Omega)}|x\mathbb{P}(X=x)|=\sum_{x\in X(\Omega)}|x|\,\mathbb{P}(X=x).$$
D'autre part, par le théorème de transfert,
$$\sum_{x\in X(\Omega)}|x|\,\mathbb{P}(X=x)=\mathbb{E}(|X|).$$
Donc $|\mathbb{E}(X)|\leqslant\mathbb{E}(|X|)$.

□

Remarque 27 : Puisque l'espérance est une intégrale, il est normal de retrouver toutes les propriétés de l'intégrale, on peut également montrer un résultat de séparation, l'inégalité de Cauchy-Schwarz...

Remarque 28 :

1. Si Y est une variable constante égale à $c\in\mathbb{R}$, alors $\mathbb{E}(Y)=c$. En particulier,
$$\mathbb{E}(aX+b)=a\mathbb{E}(X)+b.$$
2. Si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires alors
$$\mathbb{E}(X_1+\cdots+X_n)=\mathbb{E}(X_1)+\cdots+\mathbb{E}(X_n).$$

Exemple 29 : On considère le jeu suivant. On mise 3 euros, on lance deux dés à quatre faces et on gagne alors autant d'euros que la moitié de la somme des deux dés. Quel est le gain moyen ? Le jeu est-il avantageux ?

Définition III.6

Soit X une variable aléatoire réelle $(\Omega,\mathbb{P})$. On définit **la variance** de X par
$$\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right).$$

Remarque 30 :

- Si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors, par le théorème de transfert,

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbb{P}(X = x_j) \right)^2 \mathbb{P}(X = x_i).$$

- Puisque $(X - \mathbb{E}(X))^2$ est une variable aléatoire positive alors par positivité de l'espérance, $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$.
- Attention, à cause du carré, la variance n'est pas linéaire !

Interprétation. La variance est la moyenne pondérée des écarts de X à sa moyenne $\mathbb{E}(X)$ au carré. On dit que l'espérance est un indicateur de position tandis que la variance est un indicateur de dispersion. En particulier $\mathbb{V}(X) = 0$ si et seulement si $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}(X)) = 1$.

Proposition III.7 (Formule de Koenig-Huygens)

Soit X une variable aléatoire réelle $(\Omega, \mathbb{P})$. Alors, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Démonstration. Par définition, on a

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2\right).$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}\left(X \underbrace{\mathbb{E}(X)}_{=\text{constante}}\right) + \mathbb{E}\left(\underbrace{\mathbb{E}(X)^2}_{=\text{constante}}\right) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2.$$

□

Remarque 31 : Par le théorème de transfert, si $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$ alors

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \mathbb{P}(X = x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) \right)^2.$$

Exemple 32 : Soit X le résultat d'un dé équilibré à six faces. Calculer la variance de X.

Exemple 33 : Soit S la somme de deux dés à 4 faces équilibrés. Déterminer la variance de S.

Définition III.8

- Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit **l'écart-type** de S par

$$\sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)}.$$

- Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On définit **la covariance** de X et Y par

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Proposition III.9

Soient (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. $\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X)$
2. $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + 2ab\mathrm{Cov}(X, Y) + b^2\mathbb{V}(Y)$.
3. S'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) = c$, alors $\mathbb{V}(X) = 0$.

Démonstration. Les deux premiers points sont laissés en exercice. Montrons le troisième point. Par la formule de Koenig-Huygens,

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \mathbb{P}(X = x) - \left(\sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x) \right)^2.$$

Or par hypothèse $X(\Omega) = \{c\}$ et $\mathbb{P}(X = c) = \mathbb{P}(\Omega) = 1$. Par conséquent,

$$\mathbb{V}(X) = c^2 - (c)^2 = 0.$$

□

Remarque 34 :

- En particulier la variance N'EST PAS linéaire.
- Si $Y = 1$ alors $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$.

Proposition III.10

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathbb{P})$? Si X et Y sont indépendantes, alors

1. $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, on dit dans ce cas que X et Y sont non-corrélées,
3. $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration. Par le théorème de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(XY) &= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \sum_{y\in Y(\Omega)} xy\mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) && \textit{par indépendance} \\
&= \sum_{x\in X(\Omega)} \left(x\mathbb{P}(X = x) \sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) \right) \\
&= \left(\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x) \right) \left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\mathbb{P}(Y = y) \right) \\
&= \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).
\end{aligned}$$

□

Remarque 35 :

1. ATTENTION la réciproque est fausse. Si X et Y sont non-corrélés ou si $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ alors cela n'implique pas toujours que X et Y sont indépendants.
2. Si X et Y sont indépendantes alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes. Donc

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y)).$$

Proposition III.11 (Inégalité de Markov)

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(|X|)}{a}.$$

En particulier si X est **positive**, pour tout $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Démonstration. Soit $a > 0$. Notons $X_a = \{x \in X(\Omega) \mid |x| \geqslant a\}$. Alors, par la proposition I.8, on a

$$a\mathbb{P}(|X| \geqslant a) = a \sum_{x\in X_a} \mathbb{P}(X = x) = \sum_{x\in X_a} a\mathbb{P}(X = x).$$

Or pour tout $x \in X_a$, $a \leqslant |x|$. Donc puisque $\mathbb{P}(X=x)$ est positif,

$$a\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \sum_{x \in X_a} |x| \mathbb{P}(X=x) = \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X=x) - \sum_{x \in X(\Omega)\setminus X_a} \underbrace{|x| \mathbb{P}(X=x)}_{\geqslant 0} \leqslant \sum_{x \in X(\Omega)} |x| \mathbb{P}(X=x).$$

Par le théorème de transfert, on conclut que

$$a\mathbb{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \mathbb{E}(|X|).$$

□

Proposition III.12 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On a alors pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Démonstration. Par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, on a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) = \mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geqslant \varepsilon^2\right)$. On applique alors l'inégalité de Markov à la variable $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ et au réel $a = \varepsilon^2$. On obtient bien que

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

□

IV Lois usuelles

IV.1 Loi déterministe

Définition IV.1

On dit qu'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suit une **loi déterministe** ou certaine s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$X(\Omega) = \{c\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = c) = 1.$$

Proposition IV.2

Si X est déterministe, égale à c alors $\mathbb{E}(X) = c$ et $\mathbb{V}(X) = 0$.

IV.2 Loi uniforme

Définition IV.3

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\![1; n]\!]$ si et seulement si

$$X(\Omega) = [\![1; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![1; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; n]\!])$.

Interprétation. Cela correspond au résultat d'une expérience équiprobable contenant n issues.

Exemple 36 :

1. On note X le résultat d'un dé équilibré à 6 faces. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; 6]\!])$.
2. On note X le résultat d'un tirage d'une boule dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; n]\!])$.

Proposition IV.4

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ de loi uniforme sur $[\![1; n]\!]$, $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![1; n]\!])$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = \frac{(n-1)(n+1)}{12}.$$

Démonstration. EXO ! □

Remarque 37 : Si $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ sont deux entiers $a \leqslant b$ avec a éventuellement nul, alors on dit X est une variable aléatoire uniforme sur $[\![a; b]\!]$, noté $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![a; b]\!])$ si

$$X(\Omega) = [\![a; b]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![a; b]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{b-a+1}.$$

IV.3 Loi de Bernoulli

Définition IV.5

Soient $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p si et seulement si

$$X(\Omega) = \{0; 1\} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p, \qquad \mathbb{P}(X = 1) = p.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ ou parfois $X \hookrightarrow b(p)$.

Interprétation. Cela correspond au résultat d'une expérience à deux issues, dont la probabilité du succès est donné par p et la probabilité de l'échec par $1 - p$.

Exemple 38 :

1. On lance une pièce équilibré et soit X la variable valant 1 si l'on a obtenu face et 0 si l'on a obtenu pile. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$.
2. On possède une urne avec a boules rouges et b boules vertes. On tire une boule. Soit X la variable aléatoire valant 0 si l'on a obtenu une boule rouge et 1 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\frac{b}{a+b}\right)$.

Proposition IV.6

Soient $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ de loi de Bernoulli de paramètre p, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = p, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = p(1-p).$$

Démonstration. EXO ! □

IV.4 Loi binomiale

Définition IV.7

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0; 1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$. On dit que X suit une **loi binomiale** de paramètre n et p si et seulement si

$$X(\Omega) = [\![0; n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0; n]\!], \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note alors $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, p)$.

Interprétation. Cela correspond au nombre de succès obtenus après n réalisations indépendantes d'une même expérience de Bernoulli de paramètre p.
Par exemple on lance n fois une pièce donnant pile, que l'on dira être un succès, avec probabilité p. On suppose les lancers successifs et indépendants. Pour obtenir k succès exactement, on choisit k lancers parmi les n effectués, les

$n-k$ autres lancers seront alors des échecs. On a donc $\binom{n}{k}$ façons de choisir la position des succès et des échecs. La probabilité d'obtenir un succès est de p et un échec de $1-p$. Les lancers étant indépendant, la probabilité d'obtenir lorsque les « positions » sont choisies k succès et $n-k$ échecs est alors de $p^k(1-p)^{n-k}$. Donc au total, on a bien

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Remarque 39 :

- On obtient bien une loi de probabilité car, par la formule de u binôme de Newton,

$$\mathbb{P}(X\in[\![0;n]\!])=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^n=1.$$

- Une loi de Bernoulli est une loi binomiale de paramètre 1, si $X\hookrightarrow\mathscr{B}(1,p)$ alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}(p)$.

Exemple 40 :

1. On lance simultanément cinq pièces équilibrés. Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de pièces ayant donné pile. Alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(5,\frac{1}{2}\right)$.
2. On possède une urne avec a boules rouges et b boules vertes. On tire une boule à n reprises et avec remise. On suppose les tirages indépendants. Soit X la variable aléatoire retournant le nombre de boules vertes obtenues lors de ces n tirages. Alors $X\hookrightarrow\mathscr{B}\left(n,\frac{b}{a+b}\right)$.

Proposition IV.8

Soient $n,m\in\mathbb{N}^*$, $p\in[0;1]$, $X\hookrightarrow\mathscr{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathscr{B}(m,p)$. On suppose que X et Y sont **indépendantes**. Alors

$$X+Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n+m,p).$$

Démonstration. Puisque $X(\Omega)=[\![0;n]\!]$ et $Y(\Omega)=[\![0;m]\!]$, on constate que $(X+Y)(\Omega)=[\![0;n+m]\!]$. De plus pour tout $s\in[\![0;m+n]\!]$, on a par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=s)&=\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(X+Y=s\mid Y=k)\,\mathbb{P}(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(X+k=s\mid Y=k)\,\mathbb{P}(Y=k)\\&=\sum_{k=1}^{m}\mathbb{P}(X=s-k\mid Y=k)\,\mathbb{P}(Y=k).\end{aligned}$$

Or X et Y sont indépendantes donc pour tout $k\in[\![1;m]\!]$, $\mathbb{P}(X=s-k\mid Y=k)=\mathbb{P}(X=s-k)$. Puisque $X(\Omega)=[\![1;m]\!]$, on a $\mathbb{P}(X=s-k)=0$ si $k>s$. Donc

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=\sum_{k=1}^{s}\mathbb{P}(X=s-k)\,\mathbb{P}(Y=k)=\sum_{k=1}^{s}\binom{n}{s-k}p^{s-k}(1-p)^{n-s+k}\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}.$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}(X+Y=s)=p^s(1-p)^{n+m-s}\sum_{k=1}^{s}\binom{n}{s-k}\binom{m}{k}.$$

Par la formule de Vandermonde, on conclut que

$$\forall s\in[\![0;m+n]\!],\quad \mathbb{P}(X+Y=s)=\binom{n+m}{s}p^s(1-p)^{n+m-s},$$

i.e. $X+Y\hookrightarrow\mathscr{B}(n+m,p)$.

□

Proposition IV.9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires **indépendantes** et de même loi, la loi de Bernoulli de paramètre p :

$$\forall i \in [\![1;n]\!], \qquad X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(p).$$

Alors

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p).$$

Démonstration. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, on pose $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Montrons par récurrence que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ la proposition suivante est vraie :

$$\mathscr{P}(k) \qquad : \qquad \text{« } S_k \hookrightarrow \mathscr{B}(k,p). \text{ »}$$

Initialisation. Si $k = 1$ alors $S_1 = X_1 \hookrightarrow \mathscr{B}(p) = \mathscr{B}(1,p)$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est vrai.
Hérédité. Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$. Supposons que $\mathscr{P}(k)$ est vrai i.e. $S_k \hookrightarrow \mathscr{B}(k,p)$. La variable aléatoire S_k est une fonction des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ qui sont indépendantes de la variable X_{k+1}. Donc par la proposition II.16, S_k et X_{k+1} sont indépendantes. Or $S_k \hookrightarrow \mathscr{B}(k,p)$ et $X_{k+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(1,p)$. Donc par la proposition précédente,

$$S_{k+1} = S_k + X_{k+1} \hookrightarrow \mathscr{B}(k+1,p).$$

Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie et notamment $\mathscr{P}(n)$, donc $S_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

□

Proposition IV.10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ et X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ de loi binomiale de paramètre n et p, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$. Alors

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{V}(X) = np(1-p).$$

Démonstration. Soient $X_1, \ldots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $X_1 + \cdots + X_n$ a même loi que X. Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) &= \mathbb{E}(X_1) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) && \textit{par linéarité de l'espérance} \\
&= p + \cdots + p && \textit{par la proposition IV.6} \\
&= np.
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) &= \mathbb{V}(X_1) + \cdots + \mathbb{V}(X_n) && \textit{par indépendance des } X_i \textit{ et non la linéarité !} \\
&= p(1-p) + \cdots + p(1-p) && \textit{par la proposition IV.6} \\
&= np(1-p).
\end{aligned}$$

□