Chapitre XXVIII : Rotation, projecteur, symétrie

Ce chapitre est présenté en deux temps. Nous verrons tout d'abord quelques transformations remarquables du plan et de l'espace (rotation, symétrie/réflexion, projection) puis nous généraliserons certaines de ces transformations aux espaces vectoriels généraux.

I Transformations du plan

I.1 Rotation vectoriel dans le plan

Définition I.1

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. **La rotation vectoriel** r_θ est l'application de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ qui à tout vecteur $\vec{u}$ retourne l'unique vecteur $\vec{v}$ de même norme que $\vec{u}$ et formant un angle θ avec $\vec{v}$:

$$\|\vec{v}\| = \|\vec{u}\| \qquad \text{et} \qquad (\vec{u}, \vec{v}) = \theta.$$

Dessin :

Remarque 1 : Nous avions défini dans le chapitre 3 sur les complexes la rotation sur $\mathscr{P}$. Soient $\Omega \in \mathscr{P}$ et $r_{\theta,\Omega}$ est la rotation de $\mathscr{P}$ de centre Ω et d'angle θ. On a naturellement l'équivalence suivante

$$\forall (M, M') \in \mathscr{P}^2, \quad M' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotation affine}}}{r_{\theta,\Omega}(M)} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{\Omega M'} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotation vectoriel}}}{r_\theta}\left(\overrightarrow{\Omega M}\right)$$

Proposition I.2

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, r_θ la rotation vectoriel du plan d'angle θ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\mathscr{P}$. L'application $r_\theta \in \mathscr{L}\left(\overrightarrow{\mathscr{P}}\right)$ est linéaire et

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On donnera ci-dessous les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathscr{B}$. Soit $\vec{u}(x, y)$. On pose (r, α) les coordonnées polaires de $\vec{u}$ dans la base $\mathscr{B}$. Alors le vecteur $r_\theta(\vec{u})$ a pour coordonnées polaires $(r, \alpha + \theta)$ dans $\mathscr{B}$. Donc les coordonnées cartésiennes (x', y') de $r_\theta(\vec{u})$ sont

$$\begin{cases} x' = r\cos(\theta+\alpha) = r\cos(\theta)\cos(\alpha) - r\sin(\theta)\sin(\alpha) = x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' = r\sin(\theta+\alpha) = r\cos(\theta)\sin(\alpha) + r\cos(\alpha)\sin(\theta) = y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\begin{aligned} r_\theta : \overrightarrow{\mathscr{P}} &\to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{u}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &\mapsto r_\theta(\vec{u})\begin{bmatrix} x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y\cos(\theta) + x\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il est donc facile de voir que r_θ est linéaire et sa matrice est bien

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

$\square$

Remarque 2 : La matrice de r_θ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ orthonormée directe choisie ! (mais elle doit être orthonormée directe).

Corollaire I.3

Soient $\theta \in \mathbb{R}$, r_θ la rotation vectoriel du plan d'angle θ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\mathscr{P}$.

1. L'application r_θ est un automorphisme.
2. L'application r_θ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\|r_\theta(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.
3. L'application r_θ conserve le produit scalaire : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$, $\langle r_\theta(\vec{u}) | r_\theta(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle$.
4. L'image d'une base orthonormée directe par r_θ est une base orthonormée directe : $r_\theta(\mathscr{B})$ est une base orthonormée directe.
5. La matrice de r_θ dans une base orthonormée est une matrice orthogonale :
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)^{-1} = {}^t\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_{-\theta}).$$

Démonstration.

1. On a $\det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)) = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1 \neq 0$. Donc $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)$ est inversible et donc r_θ est un automorphisme.
2. Par définition de r_θ.
3. On a les égalités suivantes :
$$\begin{aligned}
\langle r_\theta(\vec{u}) | r_\theta(\vec{v})\rangle &= \frac{\|r_\theta(\vec{u}) + r_\theta(\vec{v})\|^2 - \|r_\theta(\vec{u}) - r_\theta(\vec{v})\|^2}{4} && \text{par l'identité de polarisation} \\
&= \frac{\|r_\theta(\vec{u} + \vec{v})\|^2 - \|r_\theta(\vec{u} - \vec{u})\|^2}{4} && \text{par linéarité de } r_\theta \\
&= \frac{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{u}\|^2}{4} && \text{par isométrie (le point précédent)} \\
&= \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle && \text{par l'identité de polarisation.}
\end{aligned}$$
4. Par le point 1, $r_\theta(\mathscr{B})$ est une base, par le point 2, les vecteurs de $r_\theta(\mathscr{B})$ restent normés, par le point 3, les vecteurs de $r_\theta(\mathscr{B})$ restent orthogonaux et puisque $\det(\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(r_\theta)) = 1 \geqslant 0$, l'orientation de la base reste inchangée.

$\square$

Exemple 3 :

1. Déterminer la matrice de la rotation d'angle $\pi/4$.
2. Les matrices suivantes sont-elles des matrices de rotation ?
$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1/3 & -2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1/3 & 2\sqrt{2}/3 \\ 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

I.2 Projection orthogonale dans le plan

Définition I.4

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$. On appelle **projection orthogonale** sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ l'application définie par

$$\begin{aligned} p_{\vec{u}} : \overrightarrow{\mathscr{P}} &\to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{v} &\mapsto p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{v}\rangle \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}. \end{aligned}$$

Proposition I.5

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$. La projection orthogonale $p_{\vec{u}}$ sur $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est linéaire $p_{\vec{u}} \in \mathscr{L}\left(\vec{\mathscr{P}}\right)$. En notant $\vec{e_1} = \vec{u}$ et $\vec{e_2}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}$ défini par exemple par $\vec{e_2} = r_{\frac{\pi}{2}}(\vec{e_1})$, on a

$$\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dessin :

Démonstration. Le caractère linéaire de $p_{\vec{u}}$ découle de la linéarité du produit scalaire. De plus $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est bien une base du plan (l'orthogonalité garantit la non colinéarité des deux vecteurs). On a

$$p_{\vec{u}}(\vec{e_1}) = p_{\vec{u}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{u} \rangle \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = \vec{u}.$$

De plus,

$$p_{\vec{u}}(\vec{e_2}) = \frac{\langle \vec{u} | \vec{e_2} \rangle \, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} = 0_{\mathbb{R}}.$$

car $\vec{e_2}$ est orthogonal à $\vec{e_1} = \vec{u}$ donc $\langle \vec{e_1} | \vec{e_2} \rangle = 0_{\mathbb{R}}$. De ces égalités on en déduit bien la matrice. □

Remarque 4 :

1. La matrice donnée dans la projection n'est valable QUE dans une base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ adaptée !
2. L'expression de $p_{\vec{u}}$ ne dépend pas du vecteur directeur de $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ choisi. En particulier, $p_{\vec{u}} = p_{\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}}$.
3. Une projection n'est pas une isométrie et ne conserve ni la norme ni le produit scalaire. Exemple $\|p_{\vec{u}}(\vec{e_2})\| = 0 \neq \|\vec{e_2}\|$.
4. L'application $p_{\vec{u}}$ est un endomorphisme mais pas un automorphisme.

Exemple 5 : Donner la matrice de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(1,1)$ dans la base canonique. Donner ensuite une base adaptée à la projection.

Proposition I.6

Soit $\vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ et $\vec{n} \in \vec{\mathscr{P}} \setminus \{\vec{0}\}$ un vecteur normal à $\vec{u}$, $\mathscr{B}$ une base de $\vec{\mathscr{P}}$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p_{\vec{u}})$. Alors

1. $p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}} = p_{\vec{u}}$ i.e. $A^2 = A$.
2. $\mathrm{Im}(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}) = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}} \;\middle|\; p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \right\}$ i.e. $\mathrm{Im}(A) = \left\{ X \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; AX = X \right\}$
3. $\mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}(\vec{n})$.

Démonstration. Avec les notations de la proposition précédente, on pose $A = \mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Alors

1. $\mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}}) = A^2 = A = \mathrm{mat}_{(\vec{e_1},\vec{e_2})}(p_{\vec{u}})$. Donc $p_{\vec{u}} \circ p_{\vec{u}} = p_{\vec{u}}$.
2. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$. Donc $\mathrm{Im}(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$. Soit $\vec{v} \in \vec{\mathscr{P}}$. Notons (a, b) ses coordonnées dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a alors par passage aux représentations matricielles,

$$p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

Par conséquent, $\left\{ \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}} \;\middle|\; p_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v} \right\} = \left\{ \vec{v} \in \vec{\mathscr{P}} \;\middle|\; \exists a \in \mathbb{R},\ \vec{v} = a\vec{e_1} \right\} = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}) = \mathrm{Vect}(\vec{u})$.

3. De même, pour $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ de coordonnées (a, b) dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$. On a

$$\vec{v} \in \mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) \quad \Leftrightarrow \quad A\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad a = 0.$$

Par conséquent, $\mathrm{Ker}\,(p_{\vec{u}}) = \mathrm{Vect}\,(e_2) = \mathrm{Vect}\,(\vec{n})$.

□

Exemple 6 : Vérifier que l'application $p : (x, y) \mapsto \left(\frac{x+2y}{5}, \frac{2x+4y}{5}\right)$ est une projection orthogonale. Déterminer son image et son noyau.

I.3 Symétrie orthogonale dans le plan

Définition I.7

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$. On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$ l'application définie par

$$\begin{aligned} s_{\vec{u}} : \overrightarrow{\mathscr{P}} &\to \overrightarrow{\mathscr{P}} \\ \vec{v} &\mapsto s_{\vec{u}}\,(\vec{v}) = 2\frac{\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle\, \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} - \vec{v}. \end{aligned}$$

Dessin :

Proposition I.8

Soient $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$, $s_{\vec{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$, $p_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$. On a alors

$$s_{\vec{u}} = 2p_{\vec{u}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}.$$

Corollaire I.9

Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \left\{\vec{0}\right\}$. La symétrie orthogonale $s_{\vec{u}}$ par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\vec{u})$ est linéaire. De plus, en notant $\vec{e_1} = \vec{u}$ et $\vec{e_2} = r_{\frac{\pi}{2}}\,(\vec{e_1})$, on a

$$\mathrm{mat}_{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}\,(s_{\vec{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Puisque $s_{\vec{u}}$ est la différence de deux applications linéaires du plan, $s_{\vec{u}}$ est un endomorphisme de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. De plus, par propriété sur les représentations matricielles, en notant $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$,

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(s_{\vec{u}}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(2p_{\vec{u}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right) = 2\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\,(p_{\vec{u}}) - \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}\left(\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right) = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Remarque 7 : Comme pour la projection, cette représentation matricielle ne fonctionne que parce que la base est adaptée à la symétrie.

Corollaire I.10

Soient $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$, $s_{\overrightarrow{u}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u})$ et $\mathscr{B}$ une base orthonormée directe de $\mathscr{P}$.

1. L'application $s_{\overrightarrow{u}}$ est un automorphisme.
2. L'application $s_{\overrightarrow{u}}$ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$, $\|s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = \|\overrightarrow{v}\|$.
3. L'application $s_{\overrightarrow{u}}$ conserve le produit scalaire : $\forall \left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{v'}\right) \in \overrightarrow{\mathscr{P}}^2$, $\left\langle s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) \middle| s_{\overrightarrow{u}}\left(\overrightarrow{v'}\right)\right\rangle = \left\langle \overrightarrow{v} \middle| \overrightarrow{v'}\right\rangle$.
4. L'image d'une base orthonormée directe par $s_{\overrightarrow{u}}$ est une base orthonormée indirecte : $s_{\overrightarrow{u}}(\mathscr{B})$ est une base orthonormée indirecte.
5. La matrice de $s_{\overrightarrow{u}}$ dans une base orthonormée directe est une matrice orthogonale :
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})^{-1} = {}^t\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}}).$$

Démonstration.

1. Avec les notations précédentes, en posant $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$, on a $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s_{\overrightarrow{u}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Or $\det(A) = -1 \neq 0$, donc A est inversible et donc $s_{\overrightarrow{u}}$ est bijective. Conclusion, $s_{\overrightarrow{u}}$ est un automorphisme.
2. Soit $\overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}}$ et (a, b) ses coordonnées dans la base $\mathscr{C}$. Alors
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})) = A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ -b \end{bmatrix}.$$
Donc,
$$\|s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v})\| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\overrightarrow{v}\|.$$
3. Même démonstration que pour la rotation en utilisant l'identité de polarisation, la linéarité et le point précédent : EXO !
4. Par le point 1, l'image d'une base est une base, par le point 2, les normes sont conservées, par le point 3, l'orthogonalité est conservée et puisque $\det(A) = -1$, l'orientation est inversée.
5. L'égalité $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})^{-1} = {}^t\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}}) = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})$ est immédiate si $\mathscr{B} = \mathscr{C}$: $A^{-1} = {}^tA = A$. Donc, par un théorème sur la représentation matricielle, on en déduit que $s_{\overrightarrow{u}}^{-1} = s_{\overrightarrow{u}}$ donc toujours par un résultat sur la représentation matricielle pour toute base $\mathscr{B}$, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})$. On admet que si $\mathscr{B}$ est orthonormée, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s_{\overrightarrow{u}})$ est symétrique

□

Proposition I.11

Soit $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ et $\overrightarrow{n} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \setminus \{\overrightarrow{0}\}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{u}$, $\mathscr{B}$ une base de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(p_{\overrightarrow{u}})$. Alors

1. $s_{\overrightarrow{u}} \circ s_{\overrightarrow{u}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}$ i.e. $A^2 = I_2$.
2. $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{u}) = \left\{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \right\} = \mathrm{Ker}\,\left(s_{\overrightarrow{u}} - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right)$
3. $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{n}) = \left\{ \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; s_{\overrightarrow{u}}(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v} \right\} = \mathrm{Ker}\,\left(s_{\overrightarrow{u}} + \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{P}}}\right)$.

Démonstration. EXO !

□

Exemple 8 :

1. Déterminer dans la base canonique la matrice de la symétrie sur $\mathrm{Vect}\,(1, 1)$.
2. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}2 & -1/2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'une symétrie et déterminer son axe.

Proposition I.12

Soient $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs non nuls du plan. Alors la composée de $s_{\overrightarrow{u_1}}$ et de $s_{\overrightarrow{u_2}}$ est une rotation d'angle $\theta = 2\,(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$.

Dessin :

Démonstration. En coordonnées polaires si $\theta_1 = \arg(\overrightarrow{u_1})$, $\theta_2 = \arg(\overrightarrow{u_2})$ et $\alpha = \arg(\overrightarrow{v})$ alors $\arg(s_{\overrightarrow{u_1}}(\overrightarrow{v})) = \theta_1 + (\theta - \alpha) = 2\theta_1 - \alpha$. De même, $\arg(s_{\overrightarrow{u_2}}(s_{\overrightarrow{u_1}}(\overrightarrow{v}))) = 2\theta_2 - (2\theta_1 - \alpha) = 2(\theta_2 - \theta_1) + \alpha$. □

II Transformations de l'espace

II.1 Projection

Définition II.1

Soient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. On appelle projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{n})$ l'application

$$p_{\overrightarrow{n}} : \begin{array}{l} \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{u} \mapsto \dfrac{\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}. \end{array}$$

2. On appelle projection orthogonale sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'application

$$p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} : \begin{array}{l} \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{u} \mapsto \overrightarrow{u} - \dfrac{\langle \overrightarrow{u} | \overrightarrow{n} \rangle \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}. \end{array}$$

Dessin :

Proposition II.2

Soient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ deux vecteurs non colinéaires de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On pose $\overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{n}$ et $\mathscr{C} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$. Alors

1. La projection $p_{\overrightarrow{n}}$ sur $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{n})$ et la projection $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ sont des endomorphismes de $\overrightarrow{E}$.
2. Dans la base $\mathscr{C}$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p_{\overrightarrow{n}}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 9 : Une projection n'est toujours pas bijective mais vous noterez que $p_{\overrightarrow{n}} + p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$ qui traduit en réalité le fait que $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{n}) + \overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{E}$. Ces espaces sont mêmes supplémentaires et la décomposition est donnée par les projections respectives !

Proposition II.3

Soient $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ un plan de l'espace $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{n} \neq \overrightarrow{0}$ un vecteur normal à $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. On pose $p_{\overrightarrow{n}}$ la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{n})$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Alors

1. $p_{\overrightarrow{n}} \circ p_{\overrightarrow{n}} = p_{\overrightarrow{n}}$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} \circ p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}} = p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$.
2. $\mathrm{Im}\,(p_{\overrightarrow{n}}) = \mathrm{Ker}\,(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}) = \mathrm{Vect}\,(\overrightarrow{n}) = \left\{ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; p_{\overrightarrow{n}}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \right\}$.
3. $\mathrm{Ker}\,(p_{\overrightarrow{n}}) = \mathrm{Im}\,(p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}) = \overrightarrow{\mathcal{P}} = \left\{ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathscr{P}} \;\middle|\; p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} \right\}$.

Remarque 10 : La matrice A d'une projection dans l'espace (sur une droite ou un plan) vérifie donc toujours $A^2 = A$.

Exemple 11 :

1. Donner la matrice de la projection orthogonale sur $x - 2y + 3z = 0$ dans la base canonique et dans une base adaptée que l'on précisera.
2. Soit $p \in \mathscr{L}\left(\overrightarrow{E}\right)$ telle que sa matrice dans la base canonique soit $A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que p est une projection et déterminer dans quel ensemble.

II.2 Réflexion/Symétrie

Définition II.4

Soit $p \in \mathscr{L}\left(\overrightarrow{E}\right)$ une projection vectorielle (sur un plan ou une droite). On appelle symétrie s orthogonale par rapport à $\mathrm{Im}\,(p)$ l'application $s = 2p - \mathrm{Id}_{\overrightarrow{E}}$:

$$\begin{aligned} s : \overrightarrow{E} &\to \overrightarrow{E} \\ \overrightarrow{u} &\mapsto s(\overrightarrow{u}) = 2p(\overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}. \end{aligned}$$

Lorsque $\mathrm{Im}\,(p)$ est un plan, la symétrie est appelé une **réflexion**.

Dessin :

Proposition II.5

Soient $\vec{F}$ une droite ou un plan de $\vec{E}$ et $s_{\vec{F}}$ la symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F}$. Alors $s_{\vec{F}}$ est un endomorphisme de $\vec{E}$. De plus,

1. Si $\dim\left(\vec{F}\right) = 1$ i.e. si $\vec{F}$ est une droite, alors, il existe $\mathscr{C}$ une base de $\vec{E}$ telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
2. Si $\dim\left(\vec{F}\right) = 2$ i.e. si $\vec{F}$ est un plan, alors, il existe $\mathscr{C}$ une base de $\vec{E}$ telle que
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Proposition II.6

Soient s une symétrie orthogonale de l'espace.

1. L'application s est un automorphisme.
2. L'application s est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{u} \in \vec{E}$, $\|s(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.
3. L'application s conserve le produit scalaire : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{E}^2$, $\langle s(\vec{u}) | s(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u} | \vec{v}\rangle$.
4. Si A est la matrice de s dans une base orthonormée directe alors A une matrice orthogonale :
$$A^{-1} = {}^tA = A.$$

Proposition II.7

Soient $\vec{F}$ une droite ou un plan de l'espace, s une symétrie orthogonale par rapport à $\vec{F}$ et A la matrice de s dans une base.

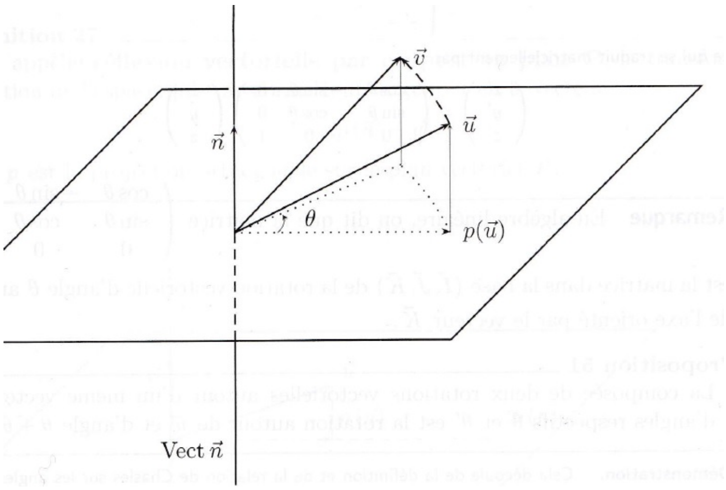
1. $s \circ s = \mathrm{Id}_{\vec{E}}$ i.e. $A^2 = I_3$.
2. $\vec{F} = \mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_{\vec{E}}) = \left\{ \vec{u} \in \vec{\mathscr{P}} \;\middle|\; s(\vec{u}) = \vec{u} \right\}$.

Exemple 12 : Soit $A = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Montrer que A est la matrice d'une symétrie dont on déterminera les points fixes.

II.3 Rotation dans l'espace

Définition II.8

Soient $\vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On note $\vec{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{u}$, $p_{\vec{u}}$ la projection orthogonale sur $\vec{u}$ et $p_{\vec{\mathcal{P}}}$ la projection orthogonale sur $\vec{\mathcal{P}}$. On appelle alors rotation vectorielle $R_{\vec{u},\theta}$ d'axe $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et d'angle θ, l'application définie par
$$\begin{aligned} R_{\vec{u},\theta} : \vec{E} &\to \vec{E} \\ \vec{v} &\mapsto p_{\vec{u}}(\vec{v}) + r_\theta\left(p_{\vec{\mathcal{P}}}(\vec{v})\right), \end{aligned}$$
où r_θ est la rotation plane dans $\vec{\mathcal{P}}$ d'angle θ.



Proposition II.9

Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace et θ un réel. On pose $\vec{e_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{e_2}$ un vecteur normé et orthogonal à $\vec{e_1}$ et enfin $\vec{e_3} = \vec{e_1} \wedge \vec{e_2}$. Alors $R_{\vec{u},\theta}$ est une application linéaire et sa matrice dans la base $\mathscr{C} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est donnée par

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}\left(R_{\vec{u},\theta}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Proposition II.10

Soient $\vec{u} \in \vec{E}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $R_{\vec{u},\theta}$ la rotation d'axe $\operatorname{Vect}(\vec{u})$ et d'angle θ.

1. L'application $R_{\vec{u},\theta}$ est un automorphisme.
2. L'application $R_{\vec{u},\theta}$ est une isométrie i.e. conserve la norme : $\forall \vec{v} \in \vec{E}$, $\|R_{\vec{u},\theta}(\vec{v})\| = \|\vec{v}\|$.
3. L'application $R_{\vec{u},\theta}$ conserve le produit scalaire : $\forall \left(\vec{v}, \vec{v'}\right) \in \vec{E}^2$, $\left\langle R_{\vec{u},\theta}(\vec{v}) \middle| R_{\vec{u},\theta}\left(\vec{v'}\right)\right\rangle = \left\langle \vec{v} \middle| \vec{v'} \right\rangle$.
4. Si A est la matrice de $R_{\vec{u},\theta}$ dans une base orthonormée directe alors A une matrice orthogonale :
$$A^{-1} = {}^tA.$$
5. La droite $\operatorname{Vect}(\vec{u})$ est laissée fixe par la rotation : $\operatorname{Vect}(\vec{u}) = \operatorname{Ker}\left(R_{\vec{u},\theta} - \operatorname{Id}_{\vec{E}}\right) = \left\{ \vec{v} \in \vec{E} \;\middle|\; R_{\vec{u},\theta}(\vec{v}) = \vec{v} \right\}$.

III Transformations vectoriels en dimension quelconque

III.1 Projection

Définition III.1

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Supposons F et G supplémentaires :

$$E = F \oplus G.$$

Alors on définit p comme étant l'unique application linéaire vérifiant

$$\forall x \in F, \quad p(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G, \quad p(x) = 0_E.$$

L'application p est appelée **la projection sur F parallèlement à G**.

Remarque 13 : Définir p uniquement sur F et G suffit à la définir par linéarité entièrement sur E tout entier : c'est le sens de la proposition II.8 du chapitre XIX sur les applications linéaires.

Remarque 14 : Attention un sous-espace vectoriel F ne possède pas un unique supplémentaire G. Donc il n'existe pas une unique projection sur F mais une infinité (sauf si $F = E$ ou $\{0_E\}$) suivant la direction choisie pour la projection. Dans les espaces $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'unicité des projections considérées découlaient du caractère orthogonal imposé.

Exemple 15 :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, déterminer la projection sur $F = \text{Vect}(1,1)$ parallèlement à $G_1 = \text{Vect}(1,0)$, $G_2 = \text{Vect}(0,1)$ et $G_3 = \text{Vect}(1,-1)$. Laquelle des trois est la projection orthogonale ?
2. On rappelle que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. Déterminer la projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ puis la projection sur $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ parallèlement à $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Proposition III.2

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $p \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si p est la projection sur F parallèlement à G, alors
$$p \circ p = p, \qquad F = \text{Im}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\}, \qquad G = \text{Ker}(p).$$
2. Réciproquement si $p \circ p = p$ alors p est une projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$ et l'on a alors
$$\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E.$$

Démonstration.

1. Supposons que p est la projection sur F parallèlement à G.
   - Montrons que $F = \{x \in E \mid p(x) = x\}$. Par définition, on sait que $F \subseteq \{x \in E \mid p(x) = x\}$. Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $p(x) = x$. Notons $x = y + z$, la décomposition de x dans $F \oplus G$ i.e. l'unique couple $(y,z) \in F \times G$ tel que $x = y + z$. Par linéarité de p, $p(x) = p(y) + p(z)$. Or $y \in F$, donc $p(y) = y$ et $z \in G$, donc $p(z) = 0_E$. Ainsi,
   $$p(x) = y.$$
   Or par hypothèse, $x = p(x)$, donc $x = y$ et $z = 0$, i.e. $x \in F$. On a donc $\{x \in E \mid p(x) = x\} \subseteq F$. Ainsi,
   $$F = \{x \in E \mid p(x) = x\}.$$
   - Montrons maintenant que F est l'image de p. Soit $x \in F$. Par définition, $p(x) = x$. Donc x est l'image de quelqu'un (lui-même) par p. Donc $x \in \text{Im}(p)$. Donc $F \subseteq \text{Im}(p)$. Réciproquement, soit $x \in \text{Im}(p)$. Il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. Notons $(y', z') \in F \times G$ la décomposition de x' dans $F \oplus G$: $x' = y' + z'$. Par linéarité et définition de p,
   $$x = p(x') = p(y' + z') = p(y') + p(z') = y' \in F.$$
   Donc $x \in F$. Donc $\text{Im}(p) \subseteq F$. On a ainsi montré que
   $$F = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \text{Im}(p).$$
   - Montrons maintenant que $p^2 = p$. Soit $x \in E$, on a $p(x) \in \text{Im}(p)$. Donc par ce qui précède, $p(x) \in \{u \in E \mid p(u) = u\}$. Donc $p(p(x)) = p(x)$ i.e. $p^2(x) = p(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$,
   $$p^2 = p.$$
   - Montrons enfin que $G = \text{Ker}(p)$. Par définition de p, $G \subseteq \text{Ker}(p)$. Soit $x \in \text{Ker}(p)$. On note $x = y + z$ sa décomposition dans $F \oplus G$. Alors, par linéarité et définition de p,
   $$p(x) = p(y) + p(z) = y.$$
   Or $p(x) = 0_E$ car $x \in \text{Ker}(p)$. Ainsi, $y = 0_E$ i.e. $z = x$. Donc $x \in G$. Donc $\text{Ker}(p) \subseteq G$. Conclusion,
   $$G = \text{Ker}(p).$$
2. Soit $p \in \mathscr{L}(E)$. Montrons que p est une projection sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(G)$. Il nous faut en tout premier lieu montrer que $\text{Im}(p)$ et $\text{Ker}(p)$ sont supplémentaires.

- Montrons que $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont en somme directe. Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p)$. Alors $p(x) = 0_E$ et il existe $x' \in E$ tel que $p(x') = x$. En particulier $p^2(x') = p(x) = 0_E$. Cependant, on sait aussi que $p^2 = p$. Donc $p(x') = p^2(x') = 0_E$. Or x est l'image de x' : $x = p(x') = 0_E$. Donc $\mathrm{Im}\,(p) \cap \mathrm{Ker}\,(p) = \{0_E\}$. L'inclusion réciproque étant assurée par le fait que les ensembles $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont des sous-espaces vectoriels, on en déduit que $\mathrm{Im}\,(p)$ et $\mathrm{Ker}\,(p)$ sont en somme directe.
- De plus par le théorème du ran... QUOI ? Personne n'a dit que E était de dimension finie. Pas de raccourci, il nous faut revenir aux définitions. Soit $x \in E$. On pose $y = p(x)$ et $z = x - p(x)$. On a
  (i) $x = y + z$
  (ii) $y \in \mathrm{Im}\,(p)$
  (iii) Montrons que $z \in \mathrm{Ker}\,(p)$. Par linéarité, $p(z) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x)$. Or $p^2 = p$. Donc $p(z) = p(x) - p(x) = 0_E$.

  Donc $E = \mathrm{Im}\,(p) + \mathrm{Ker}\,(p)$.

Conclusion, $E = \mathrm{Im}\,(p) \oplus \mathrm{Ker}\,(p)$.

3. Montrons maintenant que p est une projection sur $\mathrm{Im}\,(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(p)$.
   - Soit $x \in \mathrm{Im}\,(p)$, alors il existe $x' \in E$ tel que $x = p(x')$. Donc $p(x) = p^2(x') = p(x')$ car $p^2 = p$. Donc $p(x) = x$.
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}\,(p)$ alors $p(x) = 0_E$, OK !

   Donc p vérifie bien la définition III.1.

□

III.2 Symétrie

Définition III.3

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires : $E = F \oplus G$. Alors on définit s comme étant l'unique application linéaire vérifiant

$$\forall x \in F, \quad s(x) = x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in G, \quad s(x) = -x.$$

L'application s est appelée **la symétrie par rapport à F parallèlement à G**.

Proposition III.4

Soient E un espace vectoriel et F et G deux espaces supplémentaires dans E. Soit p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On a alors

$$s = 2p - \mathrm{Id}_E.$$

Démonstration.

- Soit $x \in F$, alors $s(x) = x$ et $(2p - \mathrm{Id}_E)(x) = 2p(x) - x = 2x - x = x$. Donc $s(x) = (2p - \mathrm{Id}_E)(x)$.
- Soit $x \in G$, alors $s(x) = -x$ et $(2p - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_2 - x = -x$. Donc $s(x) = (2p - \mathrm{Id}_E)(x)$.
- Les deux applications linéaires coïncident sur F et G et donc par linéarité sur $F \oplus G = E$.

□

Proposition III.5

Soient E un espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, $s \in \mathscr{L}(E)$.

1. Si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G, alors
$$s \circ s = \mathrm{Id}_E, \qquad F = \{x \in E \mid s(x) = x\}, \qquad G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}.$$
   En particulier s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.
2. Réciproquement si $s \circ s = p$ alors s est une projection sur $\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E)$ et l'on a alors
$$\mathrm{Ker}\,(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(s + \mathrm{Id}_E) = E.$$

Démonstration.

1. Si s est une symétrie par rapport à F parallèlement à G alors $p = \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}$ est la projection sur F parallèlement à G. Donc
$$s^2 = (2p - \mathrm{Id}_E)^2 = 4p^2 - 4p + \mathrm{Id}_E = 4p - 2p + \mathrm{Id}_E \qquad \text{car } p \text{ est un projecteur}$$
Ainsi, on a bien $s^2 = \mathrm{Id}_E$. De plus,
$$F = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \left\{x \in E \;\middle|\; \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}(x) = x\right\} = \{x \in E \mid s(x) + x = 2x\} = \{x \in E \mid s(x) = x\}$$
et
$$G = \{x \in E \mid p(x) = 0_E\} = \left\{x \in E \;\middle|\; \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}(x) = 0_E\right\} = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$$
2. Réciproquement si $s^2 = \mathrm{Id}_E$ alors en posant $p = \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2}$, on observe que $p^2 = \frac{s^2+2s+\mathrm{Id}_E}{4} = \frac{\mathrm{Id}_E+2s+\mathrm{Id}_E}{2} = \frac{s+\mathrm{Id}_E}{2} = p$. Donc p est un projecteur et alors, on vérifie facilement que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie.

$\square$

Exemple 16 :

1. Dans $\mathbb{C}$, montrer que $s : z \mapsto \overline{z}$ est une symétrie.
2. Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que $s : A \mapsto {}^tA$ est une symétrie.
3. Dans $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que $s : P(X) \mapsto P(-X)$ est une symétrie.

III.3 Un peu de géométrie euclidienne

Le but de cette section est d'introduire les outils pour parler des projections et des symétries dites orthogonales. Pour parler d'orthogonalité, nous avons besoin d'un produit scalaire.

On se place dans ce paragraphe dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$. On dit alors que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace **préhilbertien**. Si de plus E est de dimension finie on dit que $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ est un espace **euclidien**. On notera $\|\cdot\|$ la norme euclidienne de E i.e. associé au produit scalaire :
$$\forall x \in E, \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}.$$

III.4 Orthogonal d'une partie

Définition III.6

Soit E un espace préhilbertien. Soient A et B deux parties de E, on dit que A et B sont orthogonales si et seulement si
$$\forall (x, y) \in A \times B, \quad \langle x | y \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

Exemple 17 : On pose $E = \mathscr{C}([0; 2\pi], \mathbb{R})$, muni du produit scalaire
$$(f, g) \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) g(t) \, \mathrm{d}t.$$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1; n]\!]$, on pose $f_k : x \mapsto \cos(kx)$ et $g_k : x \mapsto \sin(kx)$. Vérifier que $A = \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$ et $B = \{g_1, \ldots, g_n\}$ sont orthogonales.

Définition III.7

Soit A une partie de E, un espace préhilbertien. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$ défini par
$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \ \langle x | y \rangle = 0_{\mathbb{R}}\}.$$

Remarque 18 : Dans les deux définition précédentes, A et B sont des sous-ensembles quelconques de E et non nécessairement des sous-espaces vectoriels.

Proposition III.8

Soit A une partie de E, un espace préhilbertien. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Soit A une partie de E.

- $A^\perp \subseteq E$ par définition.
- Pour tout $x \in A$, on a $\langle x|0_E\rangle = 0_\mathbb{R}$, donc $0_E \in A^\perp$.
- Soient $(x,y) \in \left(A^\perp\right)^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors pour tout $z \in A$, par linéarité du produit scalaire,

$$\langle \lambda\, x + \mu y|z\rangle = \lambda \langle x|z\rangle + \mu \langle y|z\rangle .$$

  Or $x \in A^\perp$, $y \in A^\perp$, donc $\langle x|z\rangle = \langle y|z\rangle = 0_\mathbb{R}$. Donc

$$\forall z \in A, \qquad \langle \lambda\, x + \mu y|z\rangle = 0,$$

  et $\lambda\, x + \mu y \in A^\perp$.

Conclusion, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

Proposition III.9

Soient A et B deux parties de E, un espace préhilbertien. On a

1. Si $A \subseteq B$, alors $B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$.

Démonstration.

1. Soit $x \in B^\perp$. Montrons que $x \in A^\perp$ i.e. pour tout $y \in A$, $\langle x|y\rangle = 0_\mathbb{R}$. Puisque $x \in B^\perp$, pour tout $y \in B$, $\langle x|y\rangle = 0_\mathbb{R}$ donc pour tout $y \in A \subseteq B$, $\langle x|y\rangle = 0_\mathbb{R}$. Donc $x \in A^\perp$. Donc $B^\perp \subseteq A^\perp$.
2. Soit $x \in A$. Montrons que $x \in \left(A^\perp\right)^\perp$ i.e. que pour tout $y \in A^\perp$, $\langle x|y\rangle = 0$. Or $x \in A$ donc pour tout $y \in A^\perp$, on a bien $\langle x|y\rangle = 0$. Donc $x \in \left(A^\perp\right)^\perp$ et ainsi, $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$.

□

III.5 Bases orthonormées

On suppose dans toute la suite que E est un espace euclidien, c'est-à-dire que E est munit d'un produit scalaire et que E est de dimension finie.

Définition III.10

Soit E un espace euclidien de dimension n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une base orthonormée si

1. $\mathscr{B}$ est une base de E,
2. $\mathscr{B}$ est orthogonale : pour tout $(i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $\langle e_i|e_j\rangle = 0_\mathbb{R}$
3. $\mathscr{B}$ est normée : pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $\|e_i\| = 1$.

Proposition III.11

Soit E un espace euclidien. Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs non nuls et orthogonaux. Alors

1. La famille $\mathscr{F}$ est libre.
2. *Pythagore généralisé* On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2 .$$

Remarque 19 : D'après cette proposition, le premier point de la définition précédente est donc facultatif car si $\mathscr{B}$ est orthogonale alors elle est libre et si son cardinal coïncide avec la dimension de E, cela en fait une base de E.

Démonstration.

1. Soient $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels tels que
$$\lambda_1\, x_1 + \cdots + \lambda_p\, x_p = 0.$$
Donc en particulier, pour tout $i \in [\![1; n]\!]$
$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{p} \lambda_j\, x_j \middle| e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \left\langle x_j | x_i \right\rangle.$$
Or $\langle x_i | x_j \rangle = 0$ si $i \neq j$ et $\langle x_i | x_i \rangle = \|x_i\|^2 \neq 0$. Donc
$$0 = 0 + \lambda_i \times \|x_i\|^2 + 0 \ \Rightarrow\ \lambda_i = 0.$$
Ceci étant vrai pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on en conclut que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
2. Récurrence à partir de l'égalité de Pythagore $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ démontré dans le chapitre précédent.

□

Théorème III.12 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt)

Soit E un espace euclidien. Alors il existe une base $\mathscr{B}$ de E qui soit orthonormée.

Exemple 20 : Soient E un espace euclidien de dimension 3 et $\mathscr{B} = (u_1, u_2, u_3)$ une base de E. Le vecteur u_1 est non nul car u_1 fait partie d'une famille libre. On pose alors
$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}.$$
Le vecteur e_1 est bien un vecteur normé. Soit maintenant
$$v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle\, e_1.$$
Alors, v_2 est orthogonal à e_1 :
$$\langle v_2 | e_1 \rangle = \langle u_2 | e_1 \rangle - \langle u_2 | e_1 \rangle \langle e_1 | e_1 \rangle = \langle u_2 | e_1 \rangle - \langle u_2 | e_1 \rangle \qquad \text{car } e_1 \text{ est normé}$$
Donc $\langle v_2 | e_1 \rangle = 0$ et v_2 est bien orthogonal à e_1. Supposons v_2 nul. Alors $v_2 = u_2 - \langle u_2 | e_1 \rangle\, e_1 = 0_E$ et donc
$$u_2 = \langle u_2 | e_1 \rangle\, e_1 = \langle u_2 | e_1 \rangle \frac{u_1}{\|u_1\|} \in \mathrm{Vect}\,(u_1),$$
ce qui contredit le fait que $\mathscr{B}$ est libre. Donc $v_2 \neq 0_E$. Donc on le normalise en posant
$$e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}.$$
Enfin, on procède avec la même idée en posant
$$v_3 = u_3 - \langle u_3 | e_1 \rangle\, e_1 - \langle u_3 | e_2 \rangle\, e_2.$$
Alors v_3 est orthogonal à e_1 et e_2 :
$$\langle v_3 | e_1 \rangle = \langle u_3 | e_1 \rangle - \langle u_3 | e_1 \rangle \langle e_1 | e_1 \rangle - \langle u_3 | e_2 \rangle \langle e_2 | e_1 \rangle = 0, \langle v_3 | e_2 \rangle = \langle u_3 | e_2 \rangle - \langle u_3 | e_1 \rangle \langle e_1 | e_2 \rangle - \langle u_3 | e_2 \rangle \langle e_2 | e_2 \rangle = 0.$$
De plus $v_3 \neq 0_E$ car sinon $u_3 = \langle u_3 | e_1 \rangle\, e_1 + \langle u_3 | e_2 \rangle\, e_2 \in \mathrm{Vect}\,(e_2, e_1) = \mathrm{Vect}\,(u_1, u_2)$. Donc on peu à nouveau le normaliser :
$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|}.$$
Donc par ce qui précède, (e_1, e_2, e_3) est une famille orthonormée. Donc par la remarque III.11, on en déduit que c'est une famille libre de E. Or Card $(e_1, e_2, e_3) = 3 = \dim(E)$ donc (e_1, e_2, e_3) est une base orthonormée de E.

Proposition III.13

Soit E un espace euclidien de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x \in E$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. Alors,

1. Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, $x_i = \langle x|e_i\rangle$. Autrement dit,
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle \, e_i.$$
2. Si $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, alors
$$\langle x|y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Remarque 21 : Si $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{mat}_{\mathscr{C}}(y)$, alors
$$\langle x|y\rangle = {}^tXY \qquad \text{et} \qquad \|x\|^2 = {}^tXY.$$

Proposition III.14

Soient E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E. Alors
$$F \oplus F^\perp = E.$$

Démonstration.

- Montrons que $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. Soit $x \in F \cap F^\perp$. Puisque $x \in F^\perp$, pour tout $y \in F$, on a $\langle x|y\rangle = 0$. En particulier pour $y = x \in F$ (et uniquement puisque $x \in F$), on a $0 = \langle x|x\rangle = \|x\|^2$. Donc $x = 0_E$. Donc $F \cap F^\perp \subseteq \{0_E\}$. Or $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel (proposition précédente) et F aussi (hypothèse) donc
$$F \cap F^\perp = \{0_E\}.$$
- Montrons maintenant que $F + F^\perp = E$. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E et E est de dimension finie. Donc F est aussi un espace vectoriel de dimension finie : $(F, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ est un espace euclidien. Donc par le théorème III.12, on sait qu'il existe $\mathscr{B}_F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F qui soit orthonormée. Soit $x \in E$. Montrons que x peut se décomposer en un élément de F plus un élément de $F^\perp$. On pose,
$$y = \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle \, e_i \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_p) = F.$$
On pose également
$$z = x - y.$$
On a bien $y \in F$ (i) et $x = y + z$ (ii). Montrons que $z \in F^\perp$. Soit $u \in F$. Il existe $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $u = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$. Calculons $\langle z|u\rangle = \langle x|u\rangle - \langle y|u\rangle$. Par bilinéarité,
$$\langle z|u\rangle = \sum_{j=1} u_j \langle x|e_j\rangle - \sum_{j=1} u_j \langle y|e_j\rangle = \sum_{j=1} u_j \langle x|e_j\rangle - \sum_{j=1} u_j \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle \langle e_i|e_j\rangle.$$
La famille $\mathscr{B}_F$ est une famille orthonormée donc $\langle e_i|e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$ et 1 sinon. Donc
$$\langle z|u\rangle = \sum_{j=1} u_j \langle x|e_j\rangle - \sum_{j=1} u_j \langle x|e_j\rangle = 0.$$
Donc $z \in F^\perp$ (iii). Donc par (i), (ii) et (iii), on en déduit que $x \in F + F^\perp$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, $E \subseteq F + F^\perp$. Or F et $F^\perp$ sont des parties de E donc $F + F^\perp \subseteq E$. Conclusion $E = F + F^\perp$

Ainsi, nous avons bien montré que
$$E = F \oplus F^\perp.$$

$\square$

Corollaire III.15

Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E alors,

$$\left(F^{\perp}\right)^{\perp} = F.$$

Démonstration. On a déjà vu $F \subseteq \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$. Par la proposition précédente, $E = F \oplus F^{\perp}$. Notons $x = y + z$, $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$ cette décomposition. Puisque $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$ et que $z \in F^{\perp}$, on en déduit que

$$\langle x|z\rangle = 0 = \langle x+y|z\rangle = \langle y|z\rangle + \langle z|z\rangle \qquad \textit{par linéarité.}$$

Or $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Donc $\langle y|z\rangle = 0$. Ainsi,

$$0 = \langle z|z\rangle = \|z\|^2 .$$

Par la propriété de séparation de la norme/du produit scalaire, on en déduit que $z = 0_E$. Donc $x = y \in F$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$, on en déduit que $\left(F^{\perp}\right)^{\perp} \subseteq F$ et donc $F = \left(F^{\perp}\right)^{\perp}$.

□

Définition III.15

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E.

- On appelle **projeté orthogonal** sur F, la projection p sur F et parallèlement à $F^{\perp}$.
- On appelle **symétrie orthogonale** par rapport à F, la symétrie s par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$.

Proposition III.16

Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille orthonormée de E, un espace euclidien. On note $F = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ et p la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x \in E, \qquad p(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle\, e_i.$$

Démonstration. Dans la démonstration de la proposition précédente, on a montré que $E = F + F^{\perp}$ et pour se faire, nous avons explicité cette décomposition :

$$\forall x \in E, \qquad x = y + z = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle\, e_i}_{=y\in F} + \underbrace{x - \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle\, e_i}_{=z\in F^{\perp}} .$$

De cette décomposition, et de la définition de p, il découle que $p(x) = p(y) + p(z) = y$. Par conséquent,

$$p(x) = y = \sum_{i=1}^{p} \langle x|e_i\rangle\, e_i.$$

□

Proposition III.17 (Inégalité de Bessel)

Soit E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Alors

$$\forall x \in E, \qquad \|p(x)\| \leqslant \|x\| .$$

Démonstration. Soit $x \in E$, alors on a vu précédemment que $x = p(x) + (x - p(x))$ avec $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in F^{\perp}$. Notamment $p(x)$ et $x - p(x)$ sont orthogonaux. Donc par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 = \|x - p(x) + p(x)\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x)\|^2 \geqslant \|p(x)\|^2 .$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}+$, $\|x\| \geqslant \|p(x)\|$.

□

Exemple 22 : On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire suivant :

$$\langle\cdot|\cdot\rangle : (P, Q) \mapsto \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer le projeté de X^3 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

IV Isométries, matrices orthogonales

IV.1 Isométries

Définition IV.1

Soient E un espace préhilbertien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On dit que f est une **isométrie** si et seulement si

$$\forall x \in E, \qquad \|f(x)\| = \|x\|.$$

Proposition IV.2

Soient E un espace préhilbertien et $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E.

$$f \text{ est une isométrie de } E \qquad \Leftrightarrow \qquad \forall (x, y) \in E^2,\ \langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle.$$

Démonstration.

- Si f est une isométrie. Alors pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}
\langle f(x)|f(y)\rangle &= \frac{\|f(x)+f(y)\|^2 + \|f(x)-f(y)\|^2}{4} && \textit{par l'identité de polarisation}\\
&= \frac{\|f(x+y)\|^2 + \|f(x-y)\|^2}{4} && \textit{car } f \textit{ est linéaire}\\
&= \frac{\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2}{4} && \textit{car } f \textit{ est une isométrie}\\
&= \langle x|y\rangle && \textit{à nouveau par l'identité de polarisation.}
\end{aligned}$$

- Réciproquement, si f conserve le produit scalaire pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x)|f(y)\rangle = \langle x|y\rangle$. En prenant $x = y$, on a

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x)|f(x)\rangle = \langle x|x\rangle = \|x\|^2.$$

  Donc $\|f(x)\| = \|x\|$.

$\square$

Proposition IV.3

Si f est une isométrie de E et si E est de dimension finie, alors f est un automorphisme de E.

Démonstration. Montrons que f est injectif. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f)$. Alors $f(x) = 0_E$. Donc

$$\|x\| = \|f(x)\| = \|0_E\| = 0_{\mathbb{R}}.$$

Donc $x = 0_E$. Conclusion, $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. Donc f est injectif. Or f est un endomorphisme de E et E est de dimension finie donc f est un automorphisme.

$\square$

Exemple 23 :

1. Une symétrie **orthogonale** est une isométrie.
2. Une projection même orthogonale n'est pas une isométrie (sauf si $F = E$).

IV.2 Matrices orthogonales

Définition IV.4

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est **orthogonale** si

1. M est inversible,
2. $M^{-1} = {}^tM$.

Proposition IV.5

Si M est une matrice orthogonale alors

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ X & \mapsto & MX \end{array},$$

est une isométrie pour le produit scalaire

$$\langle \cdot | \cdot \rangle \quad : \quad (X, Y) \mapsto {}^tXY.$$

Démonstration. Soient $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, alors

$$\langle f(X) | f(Y) \rangle = \langle MX | MY \rangle = {}^tMXMY = {}^tX{}^tMMY.$$

Comme M est orthogonale, ${}^tMM = I_n$, et donc $\langle f(X) | f(Y) \rangle = {}^tXY = \langle X | Y \rangle$.

□

Proposition IV.6

Si f est une isométrie de E et si $\mathscr{B}$ est une base **orthonormée** de E, alors $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration. Notons $M = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $n = \dim(E)$. Soit $(X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Soit $x \in E$ et $y \in E$ tels que $X = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $y = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y)$. Par la remarque 21, on a

$$ {}^tXY = \langle x | y \rangle = \langle f(x) | f(y) \rangle \qquad \textit{car } f \textit{ est une isométrie.}$$

Or $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(x)) = MX$ et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f(y)) = MY$. Donc

$$\forall (X, Y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \quad {}^tXY = {}^tX{}^tMMY.$$

Posons $A = {}^tMM$ et notons $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Notons également $X_1, \dots, X_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a alors pour tout $(i, j) \in [\![1; n]\!]$

$$ {}^tX_iAX_j = {}^tX_i \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix} = a_{i,j}.$$

Donc,

$$a_{i,j} = {}^tX_iAX_j = {}^tX_iX_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Ainsi, $A = I_n$ i.e. ${}^tMM = I_n$. Donc M est inversible et $M^{-1} = {}^tM$.

□

Proposition IV.7

M est une matrice orthogonale si et seulement si M est une matrice de passage entre deux bases orthonormées.