Colle du 19/02 - Sujet 1
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $A = X^3 - 4X + 2$ et $F = \{ P \in \mathbb{R}[X] \mid A|P \}$. Montrer que F un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}[X]$ et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \left(X^2 - 1\right)^n$.

1. Donner la factorisation de P dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer les coefficients de P.
3. Calculer $P^{(n)}$ de deux manières différentes.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Colle du 19/02 - Sujet 2
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Montrer que si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$ alors α est une racine de multiplicité m de P.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = u_2 = 0 \right\}$. Montrer que F un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. Soient $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. A l'aide de la division euclidienne de n par m, déterminer la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X^m - 1$.

Colle du 19/02 - Sujet 3
Polynômes et espaces vectoriels

Question de cours. Montrer que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un espace vectoriel.

Exercice 1. Soit $F = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid f(0) + f(1) = 0 \right\}$. Montrer que F un sous-espace vectoriel de $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et déterminer un supplémentaire de F.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in [X]$ tels que $XP(X+1) = (X+2)P(X)$.