Colle du 02/04 - Sujet 1
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Montrer que $\operatorname{rg}(g \circ f) \leqslant \min(\operatorname{rg}(g), \operatorname{rg}(f))$.

Exercice 1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tels que $\operatorname{Ker}(u) \oplus F = E$. Démontrer que $\dim(u(F)) = \dim(F)$.

Exercice 2. Soit E un ensemble à n éléments. Calculer $\displaystyle\sum_{X \in \mathscr{P}(E)} \sum_{x \in X} 1$.

Colle du 02/04 - Sujet 2
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Démontrer la formule donnant le cardinal de l'ensemble $E \times F$.

Exercice 1. Soient $r \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers distincts.

1. On pose $n = \prod_{i=1}^r p_i$. Combien de diviseurs n possède-t-il ?
2. Même question si $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$, où pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, $m_i \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que pour tout $x \in E$, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f^m(x) = 0_E$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in E$, $f^m(x) = 0_E$.

Colle du 02/04 - Sujet 3
Applications linéaires - Dénombrement

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème du rang.

Exercice 1. Déterminer le nombre de mots de cinq lettres comprenant trois consonnes, non toutes les trois consécutives, et deux voyelles sachant que l'alphabet compte six voyelles et vingt consonnes.

Exercice 2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(f(x_0), \ldots, f^n(x_0))$ soit une base de E.

1. Montrer que f est un automorphisme.
2. Justifier que $\left(x_0, \ldots, f^{n-1}(x_0)\right)$ est une base de E. En déduire qu'il existe $(a_0, \ldots, a_{n-1})$ tel que
$$f^n(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x_0).$$
3. On pose $g : x \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k(x)$. Montrer que pour tout $p \in [\![0; n-1]\!]$, $g(f^p(x_0)) = f^n(f^p(x_0))$.
4. En déduire que $f^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k$.