**Colle du 21/05 - Sujet 1**
**Intégration et représentation matricielle**

**Question de cours.** Convergence d'une somme de Riemann : énoncé dans le cas continue et démonstration dans le cas $\mathscr{C}^1$.

**Exercice 1**. Soit $A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$.

1. Déterminer $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique.
2. Calculer le rang de $f$, son noyau, son image.
3. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Ker}\left(f - \lambda \operatorname{Id}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}\right\}$.
4. En déduire une base $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la matrice de $f$ est diagonale.

**Exercice 2**. Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)}$. Dresser le tableau de variations de $f$.

---



**Colle du 21/05 - Sujet 2**
**Intégration et représentation matricielle**

**Question de cours.** Enoncer et démonstration de la matrice d'une composition.

**Exercice 1**. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$, $P \mapsto P(X+1) - P(X)$.

1. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique.
2. Soit $\mathscr{B} = (1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. Déterminer la matrice de $f$ dans $\mathscr{B}$.
4. Quel est le rang de $f$ ? Son noyau ? Son image ?

**Exercice 2**. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par pour tout $\forall t \neq 0$, par $f(t) = \frac{\arctan(t)}{t}$ et pour $t = 0$, $f(0) = 1$. On pose pour tout $x \neq 0$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Etudier la continuité, la parité et la monotonie de $f$.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. En déduire $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x)$.
4. Montrer que pour tout $x \neq 0$, $f(x) \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$. $\Phi$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

# Colle du 21/05 - Sujet 3
# Intégration et représentation matricielle

**Question de cours.** Enoncer de l'isomorphisme entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et démonstration de la linéarité.

**Exercice 1**. Soit $f$ une fonction positive et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et de dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall h \in \mathbb{R}$,
$$0 \leqslant f(x+h) \leqslant f(x) + f'(x)h + M\frac{h^2}{2}.$$
2. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leqslant \sqrt{2Mf(x)}$.

**Exercice 2**. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, telle que $f(1) = 1 + X^2$, $f(X) = -X(1+X)$ et $f(X) = 1 - X^2$.

1. Déterminer la matrice de $f$ dans la base canonique.
2. Déterminer une base de l'image et du noyau.
3. Montrer que $\mathscr{B} = \left(1 + X - X^2, 1 + X^2, X + X^2\right)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et calculer la matrice de $f$ dans la base $\mathscr{B}$.