Colle du 28/05 - Sujet 1
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \times \mathscr{C}^1([0;1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $(f, g) \mapsto f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ est un produit scalaire.

Exercice 1. Une urne contient initialement r boules rouges et b boules bleues. On note $N = r + b$. On effectue des tirages successifs avec remises dans l'urne. Après chaque tirage on ajoute dans l'urne $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur que celle tirée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire indicatrice de l'évènement « le n-ième tirage retourne une boule rouge. »

1. Déterminer la loi de Y_1 et de X_1.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{r + c\mathbb{E}(X_n)}{N + nc}.$$
3. Exprimer X_n à l'aide des variables $Y_1, \ldots, Y_n$. En déduire que les variables Y_n ont toutes la même loi.
4. Déterminer $\mathbb{E}(X_n)$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=1}^n u_k}$.

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$. En déduire la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n v_k$. Quelle est la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?
5. En déduire un équivalent simple de $\frac{u_n}{n}$.

Colle de mathématiques PTSI1 2017-2018

Colle du 28/05 - Sujet 2
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. Enoncer et démontrer le théorème de transfert.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit de façon équiprobable un nombre m entre 1 et n. Puis une fois ce nombre m choisi, on tire un second nombre entre 1 et m. On note X le premier nombre obtenu et Y le second.

1. Déterminer la loi conjointe de (X, Y).
2. Soit $j \in [\![1; n$. Exprimer $\mathbb{P}(Y = j)$ sous forme d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. En déduire $\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 2. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \displaystyle\sum_{p=n+1}^{kn} \frac{1}{p}$.

1. A l'aide d'un théorème du cours, démontrer que pour tout $x > 0$,
$$\frac{1}{x+1} < \ln(1+x) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$
2. En déduire un encadrement de u_n.
3. Déterminer alors la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Colle du 28/05 - Sujet 3
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{\operatorname{sh}(n)}{\operatorname{ch}(n)}\right)$. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} u_n$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On tire un nombre N de façon équiprobable entre 1 et n puis on lance N fois une pièce retournant pile avec une probabilité $p \in]0;1[$. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ on note X_k la variable aléatoire valant 1 si la pièce retourne pile au k-ième lancer. On suppose les lancers indépendants. On note enfin $S_N = X_1 + \cdots + X_N$, la variable aléatoire retournant le nombre de piles obtenues à l'issue de l'expérience.

1. Soit $k \in [\![1;n]\!]$. Préciser les lois de N, X_k et de $S_k = X_1 + \cdots + X_k$.
2. Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$,
$$\forall i \in [\![1;n]\!], \quad \mathbb{P}(S_N = i) = \frac{1}{n}\sum_{k=i}^{n}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(S_N = 0) = \frac{1-p}{np}\left(1-(1-p)^n\right).$$
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sans calcul, justifier que
$$\sum_{i=1}^{k} i\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i} = kp.$$
4. En déduire $\mathbb{E}(S_N)$.

Colle du 28/05 - Sujet 4
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' - xy = x$ par la méthode de variation de la constante.

Exercice 1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0;1[$. On pose $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Calculer la covariance de U et V.
2. Calculer $\mathbb{P}((U = 1) \cap (V = 1))$.
3. Calculer $\mathbb{P}(U = 1)$.
4. Montrer que
$$\mathbb{P}(V = 0) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 p^{2k}(1-p)^{2n-2k}.$$
5. Que peut-on déduire des questions précédentes ?

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1$.

1. Justifier que f_n admet une unique valeur d'annulation sur $[0;+\infty[$, que l'on notera a_n.
2. Montrer que $f_{n+1}(a_n) > 0$. Que peut-on en déduire ?
3. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $f_n\left(\frac{2}{3}\right)$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1} = 0$.
4. Appliquer l'identité de Bernoulli à $X^{n+1} - 1$. En déduire la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.