Colle du 04/06 - Sujet 1
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. Enoncer et démontrer l'inégalité de Markov puis l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $N \geqslant 2$. On considère une urne contenant $n+1$ boules numérotées de 0 à n. On tire successivement, avec remise, de façon équiprobable et indépendante des autres tirages, une boule. On pose $X_1 = 1$ et pour tout $n \in [\![2; N]\!]$ on note X_i la variable aléatoire valant 1 si le numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage n'avait pas été obtenu au cours des précédents tirages et 0 dans le cas contraire.

1. Déterminer la loi de X_2.
2. Soit $k \in [\![1; N]\!]$. Déterminer la loi de X_k.
3. Montrer que si $i < j$, on a $\mathbb{P}\left(\left(X_i = 1\right) \cap \left(X_j = 1\right)\right) = \frac{(n-1)^{i-1} n^{j-i}}{(n+1)^{j-1}}$.
4. Les variables aléatoires X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
5. On note Z_N le nombre de numéros distincts obtenus lors des N tirages. Déterminer l'espérance de Z.

Exercice 2. Soit

$$f \quad : \quad \begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 1 + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On définit alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $u_n \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$.
3. Justifier que f possède un unique point fixe sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$.
4. Montrer que f est $\frac{1}{2}$-lipschitzienne sur $\left[1; \frac{3}{2}\right]$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Colle du 28/05 - Sujet 2
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. A l'aide de la méthode de variation de la constante, résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $xy' - y = x^2\cos(x)$.

Exercice 1. Soient B_1, B_2, B_3, B_4 quatre variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p \in [0; 1]$. On pose

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \operatorname{rg}(B).$$

1. Déterminer la probabilité pour que B soit inversible.
2. Pour quelle valeur de p la probabilité précédente est-elle maximale ?
3. Déterminer la loi de R.

Exercice 2. Déterminer la nature de $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1!+2!+\cdots+n!}{(n+2)!}$.

Colle du 28/05 - Sujet 3
Variables aléatoires et révisions

Question de cours. On note E l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que
$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \to & \mathbb{R} \\ \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) & \mapsto & \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k \, \mathrm{e}^{-k}, \end{array}$$
est un produit scalaire.

Exercice 1. On dispose de deux urnes A et B, de deux boules noires et deux boules blanches. Chaque urne contient deux boules. A chaque étape, on tire de façon équiprobable une boule dans l'urne A, une boule dans l'urne B et l'on échange ces deux boules en plaçant dans B celle piochée dans l'urne A et en plaçant dans A celle piochée dans l'urne B. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de boules noires contenues dans l'urne A à l'étape n. On pose également pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$p_n = \mathbb{P}(X_n = 0), \qquad q_n = \mathbb{P}(X_n = 1), \qquad r_n = \mathbb{P}(X_n = 2).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} = 1 - \frac{1}{2} q_n$.
2. En déduire une expression de q_n en fonction de q_0 et de n.
3. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} q_n$.
4. On suppose qu'à l'instant initial, on range de façon équiprobable les quatre boules dans les deux urnes de sorte que chaque urne contienne exactement deux boules. Que vaut q_0 ? Comparer à la question précédente.

Exercice 2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$