Colle du 02/10 - Sujet 1
Nombres complexes

Question de cours. Enoncer puis démontrer l'expression des racines d'une équation complexe du second degré.

Exercice 1. Soit $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $\left|u - \frac{1}{z}\right| = \frac{|u-z|}{|z|}$.

Exercice 2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O de rayon $r \in \mathbb{R}_+^*$. On fixe $A(a)$ et $B(b)$ deux points distincts du plan complexe appartenant à $\mathscr{C}$. Soit $M(m)$ un point quelconque du plan différent de A et de B. On pose $z = \frac{m-b}{m-a}$. On introduit également les notations suivantes :

$$\alpha = \arg(a), \qquad \beta = \arg(b) \qquad \text{et} \qquad t = \arg(m).$$

1. On suppose $M \in \mathscr{C}$. Montrer alors que
$$z = \mathrm{e}^{i\frac{\beta-\alpha}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\beta-t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha-t}{2}\right)}.$$
2. En déduire que $2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ $[2\pi]$.

Colle du 02/10 - Sujet 2
Nombres complexes

Question de cours. Donner la forme polaire des racines n-ièmes de l'unité et en donner la démonstration.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = 1$ et $a \neq b$. On fixe $z \in \mathbb{C}$ et on pose

$$Z = \frac{z + ab\overline{z} - (a+b)}{a-b}.$$

Montrer que Z^2 est un réel négatif ou nul.

Exercice 2. On considère l'équation suivante d'inconnu $z \in C$:

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0. \tag{E}$$

1. Déterminer les solutions imaginaires pures de (E).
2. Résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Quelle est la nature du triangle dont les sommets ont pour affixe les solutions de l'équation précédente ?

Colle du 02/10 - Sujet 3
Nombres complexes

Question de cours. Enoncer et démontrer une relation entre le fait d'être une racine n-ième de l'unité et la somme des puissances d'un complexe.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \notin \mathbb{U}$, on a

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

Exercice 2. On note $P = \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $D = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. On considère formellement la fonction

$$f : \quad z \mapsto \frac{z-i}{z+i}.$$

1. Montrer que f est bien définie sur P et que pour tout $z \in P$, on a $f(z) \in D$.
2. Montrer que $f : P \to D$ est une bijection, id est, pour tout $z' \in D$, il existe un unique $z \in P$ tel que $f(z) = z'$.

Colle du 02/10 - Sujet 4
Nombres complexes

Question de cours. Donner l'application complexe d'une rotation de centre O et d'angle θ et démontrer cette formulation.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $z \in \mathbb{C}$, sachant qu'il existe une solution imaginaire pure,

$$z^3 - (4-i)\,z^2 + (7+3i)\,z - 10 - 2i = 0.$$

Exercice 2. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe.

1. Calculer ω l'affixe de Ω le centre de gravité du triangle ABC.
2. On suppose que le triangle ABC est équilatéral.
   (a) Exprimer b en fonction de a et de ω puis c en fonction de a et de ω.
   (b) En déduire que $a + bj + cj^2 = 0$.
3. On suppose maintenant que $a + bj + cj^2 = 0$.
   (a) Soient a', b' et c' respectivement les images de a, b et c par la translation de vecteur d'affixe $-\omega$. Montrer que $a' + b'j + c'j^2 = 0$.
   (b) Préciser le centre de gravité de $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$.
   (c) En déduire que $A'B'C'$ est équilatéral et conclure.