Colle du 16/10 - Sujet 1
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Déterminer l'ensemble des intervalles bornés de $\mathbb{R}$.

Exercice 1. Ici i désigne le nombre complexe. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{4n} i^k k$.

Exercice 2. Soit $(x, y) \in]-1; 1[^2$.

1. Montrer que $1 + xy > 0$.
2. Montrer que $\left|\frac{x+y}{1+xy}\right| < 1$.

Colle du 16/10 - Sujet 2
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Démontrer l'existence et l'unicité de la partie entière.

Exercice 1. En remarquant que $4 = 7 - 3$ et en utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que 7 divise $2^{4n+2} + 3^{2n+1}$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sqrt{17 + 8x - 2x^2} + \sqrt{4 + 12x - 3x^2} = x^2 - 4x + 13.$$

Indication : poser $u = (x-2)^2$.

Colle du 16/10 - Sujet 3
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Donner la formule de la somme $\sum_{k=q}^{p} u_k$, pour $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique, puis démontrer cette formule.

Exercice 1. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x+3| - |x-1| = |2x+1|\,.$$

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=K} n2^j$.

1. Montrer que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} (j+1)2^j$.
3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{k} (k+1)2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer alors la valeur de $T_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.