



Colle du 05/11 - Sujet 1
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

Exercice 1. Soit $\alpha \in]0; 1[$. Montrer que

$$|x| < \alpha \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 5} - 1 \right| < \alpha.$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{0 \leq i \leq n}$ deux familles de complexes. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$B_k = \sum_{i=0}^k b_i. \text{ Montrer que}$$

$$a_n B_n - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) B_k = \sum_{k=0}^n a_k b_k.$$



Colle du 05/11 - Sujet 2
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Donner la formule de $\sum_{k=1}^n k^2$ puis la démontrer à l'aide de $\sum_{k=1}^n k$.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k} \right)$.

Exercice 2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x - 1| \leq 2$.

1. Montrer que $|x^2 - 2| \leq 7$.
2. En déduire que $|x^3 - 3x^2 - 4| \leq 20$.
3. Montrer que $|x \cos(e^x) - 5| \geq 2$.
4. En déduire un majorant de $\left| \frac{x^3 - 3x^2 - 4}{x \cos(e^x) - 5} \right|$.



Colle du 05/11 - Sujet 3
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Déterminer l'ensemble des intervalles bornés de \mathbb{R} .

Exercice 1. A l'aide d'un changement d'indice, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $S_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des réels $x \in \mathbb{R}$ tels que $\left(x - \frac{2}{x}\right)^6 < 1$.



Colle du 05/11 - Sujet 4
Calculs algébriques et réels

Question de cours. Donner la formule de la somme $\sum_{k=q}^p u_k$, pour $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique, puis démontrer cette formule.

Exercice 1. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on pose $P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. Montrer que $P_n = \frac{2}{n(n+1)} \prod_{k=2}^n \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. En déduire P_n .