Colle du 13/11 - Sujet 1
Fonctions réelles et usuelles

Question de cours. Etudier la dérivabilité de $x \mapsto \sqrt{x}$ et de $x \mapsto x^n$.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante d'inconnu $x \in \mathbb{R}$:

$$\log_x(10) = 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}(10).$$

Exercice 2. On s'intéresse à l'équation suivante d'inconnues x et y :

$$x^y = y^x.$$

1. Déterminer l'ensemble des réels pour lesquelles cette équation a un sens.
2. On fixe $y \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^y = y^x$ d'inconnu x.
3. On suppose maintenant que x et y sont deux entiers naturels non nuls. Résoudre l'équation $x^y = y^x$.

Colle de mathématiques PTSI1 2017-2018

Colle du 13/11 - Sujet 2
Fonctions réelles et usuelles

Question de cours.

1. Démontrer la formule $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$.
2. Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^b \, \mathrm{e}^{ax}$.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{x}{1+|x|}.$$

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ dans un ensemble que l'on précisera.
3. Déterminer une expression de f^{-1} analogue à celle de f.
4. Calculer de deux façons différentes la dérivée de f^{-1}.

Exercice 2.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, linéariser $\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(x)$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right).$$

Colle du 13/11 - Sujet 3
Fonctions réelles et usuelles

Question de cours.

1. Enoncer le théorème de la bijection et de la dérivée de la réciproque pour la fonction cube.
2. Calculer $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^b\,|\ln(x)|^a$.

Exercice 1. Pour a et b deux réels, on considère pour tout $n\in\mathbb{N}$ la somme suivante :

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\operatorname{ch}(a+kb).$$

1. Montrer que

$$S_n=\frac{\operatorname{ch}\left(a+\frac{nb}{2}\right)\operatorname{sh}\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Exercice 2. Pour tout entier $n\geqslant 1$, on définit la fonction f_n sur $[-1;+\infty[$ par

$$\forall x\in[-1;+\infty[,\qquad f_n(x)=\sqrt{x+1}\,\mathrm{e}^{-nx}\,.$$

1. Soit $n\geqslant 1$. Dresser le tableau de variation de la fonction f_n.
2. Déterminer les extremums de la fonction f_n et préciser s'ils sont locaux ou globaux.
3. Quelles sont les limites de l'abscisse et de l'ordonnée du maximum de f_n lorsque n tend vers l'infini ?
4. Pour tout $n\geqslant 1$ on désigne par $\mathscr{C}_n$ la courbe représentative de le fonction f_n. Montrer qu'il existe deux points par lesquels passent toutes les courbes $\mathscr{C}_n$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_n$ au point d'abscisse 0 en fonction de n.
6. Déterminer la position relative de $\mathscr{C}_{n+1}$ par rapport à $\mathscr{C}_n$.