Colle du 27/11 - Sujet 1
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la formulation de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle d'ordre 1 à l'aide des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière.

Exercice 1. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) \arctan(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Démontrer une formule reliant $\arctan(x)$ et $\arctan(1/x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer I.
3. A l'aide du changement de variables $t = 1/x$, calculer à nouveau la valeur de I.

Exercice 2. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)(2x - 3t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}.$$

Colle du 27/11 - Sujet 2
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la formulation de l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

Exercice 1. Soient f et g deux fonctions réelles définies par

$$f : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) \qquad \text{et} \qquad g : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right).$$

1. Donner les ensembles de définition de f et de g.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f(x) = g(x)$.
3. En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right).$$

Exercice 2. On considère l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$(1 - x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x\ln(x) - x. \qquad (E)$$

1. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0; 1[$.
2. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]1; +\infty[$.
3. Résoudre cette équation sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Colle du 27/11 - Sujet 3
Intégrales et équations différentielles

Question de cours. Enoncer et démontrer la dérivabilité et la dérivée de la fonction arcsin.

Exercice 1. Résoudre l'équation suivante sur $]0;1[$:

$$x\,\mathrm{e}^{y(x)}\,y'(x) - 2\,\mathrm{e}^{y(x)} + x^2 = 0.$$

On posera $z = \mathrm{e}^y$*.*

Exercice 2. On considère l'intégrale suivante :

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

1. Effectuer le changement de variable $y = \pi - x$.
2. Montrer alors que
$$I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin(y)}\,\mathrm{d}y.$$
3. A l'aide du changement de variable $t = \tan\left(\frac{y}{2}\right)$, calculer la valeur de I.