Colle du 18/12 - Sujet 1
Equations différentielles et matrices

Question de cours. Démonstration de la formule de la transposée du produit.

Exercice 1. Résoudre l'équation différentielle suivante d'inconnue y une fonction deux fois dérivable sur $I =]0; +\infty[$:

$$\forall x \in I, \quad x^2 y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0. \qquad (E)$$

Indication : Poser $x = \mathrm{e}^t$.

Exercice 2. Soit $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer M^n pour tout $n \geqslant 0$.
2. Justifier que M est inversible.
3. Montrer que la formule obtenue à la question 1 est encore vraie pour $n = -1$.

Colle du 18/12 - Sujet 2
Equations différentielles et matrices

Question de cours. A l'aide des solutions complexes, déterminer l'ensemble des solutions réelles lorsque le discriminant de l'équation caractéristique est strictement négatif.

Exercice 1. Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer le rang de J. La matrice J est-elle inversible ?
2. Soit $A \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $JAJ = s(A)J$ où $s(A)$ est la somme de tous les coefficients de A.

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \left(1 + x^2\right)^2 y''(x) + 2x\left(1 + x^2\right) y'(x) - y(x) = 0.$$

On pourra poser $t = \varphi(x) = \arctan(x)$ *et* $z = y \circ \varphi^{-1}$.

Colle du 18/12 - Sujet 3
Equations différentielles et matrices

Question de cours. Démontrer que $t \mapsto \mathrm{e}^{rt}$ est une solution de (E_0) si et seulement si r est une solution de l'équation caractéristique.

Exercice 1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (\alpha_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\alpha_{ij} = 1$ si $i \neq j$ et $\alpha_{ij} = 1 + a_i$ si $i = j$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des réels fixés. Soit $X = {}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Calculer ${}^tXAX$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y''(x) + \mathrm{e}^{-x^2}\, y(x) = 0.$$

On pose alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = (y(x))^2 + \mathrm{e}^{-x^2}\,(y'(x))^2\,.$$

1. Démontrer que φ est bornée sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que y est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$.