Colle du 08/01 - Sujet 1
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Démontrer une relation entre $f(A \cap B)$ et $f(A) \cap f(B)$.

Exercice 1. Démontrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 2. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ telle que $f = f \circ f$. Montrer que

$$(\ f \text{ surjective }) \quad \Leftrightarrow \quad (\ f \text{ injective }).$$

Colle du 08/01 - Sujet 2
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Enoncer le théorème reliant le rang d'une matrice associée à un système avec le nombre de solutions de ce système.

Exercice 1. On considère la fonction φ suivante :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ (n,m) & \mapsto & (n+m, n-m). \end{array}$$

La fonction φ est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2. Déterminer le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 2 & 3 & \cdots & n+1 \\ \vdots & & & \vdots \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est-elle inversible ?

Colle du 08/01 - Sujet 3
Systèmes linéaires, matrices, ensembles et applications

Question de cours. Soit $\mathcal{R}$ est relation d'équivalence. Démontrer que $x\mathcal{R}y \;\Leftrightarrow\; Cl(x) = Cl(y) \;\Leftrightarrow\; Cl(x) \cap Cl(y) \neq \emptyset$.

Exercice 1. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Suivant les valeurs de (a, b, c), déterminer l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{rrrl} -2x & +y & +z & = a \\ x & -2y & +z & = b \\ -5x & +4y & +z & = z \end{array} \right.$$

Exercice 2. Soient E, F, G et H quatre ensembles. Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Démontrer que

$$(\ f,\ g \text{ et } h \text{ sont bijectives }) \qquad \Leftrightarrow \qquad (\ g \circ f \text{ et } h \circ g \text{ sont bijectives }\ )$$